



Новосибирский государственный университет, 2015 г.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.Н.Кудрявцев

*Лаборатория вычислительной аэродинамики
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН*

*Лаборатория неравновесных течений
Новосибирский государственный университет*



Лекция 1.

ВВЕДЕНИЕ

Введение

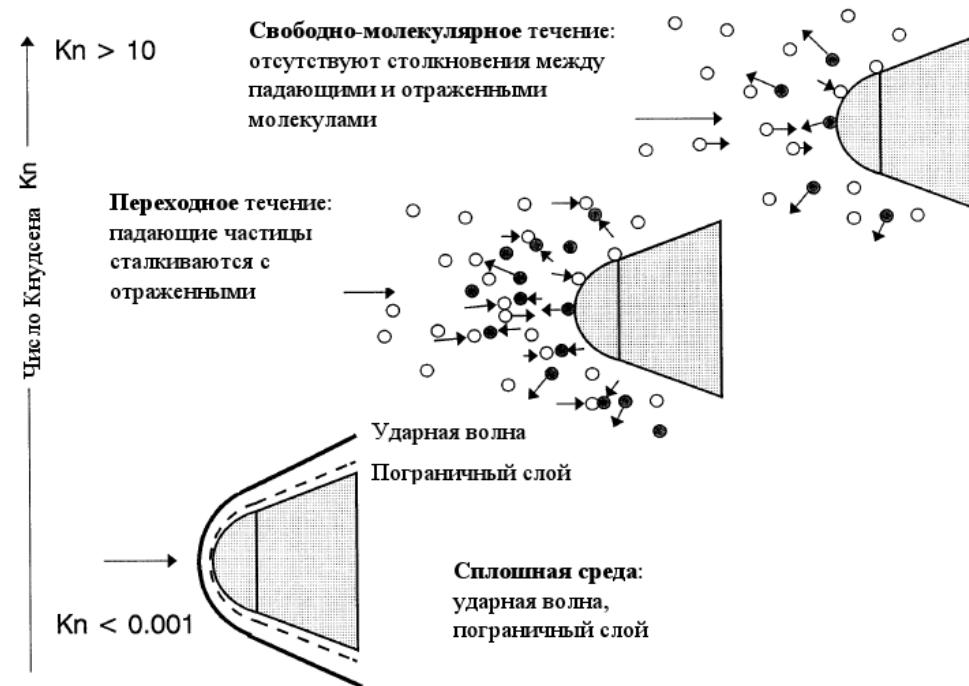
- **Зачем нужна гидродинамика?** В начале 1950-х годов американский математик Г. Биркгоф написал в предисловии к своей знаменитой книге «Гидродинамика»:

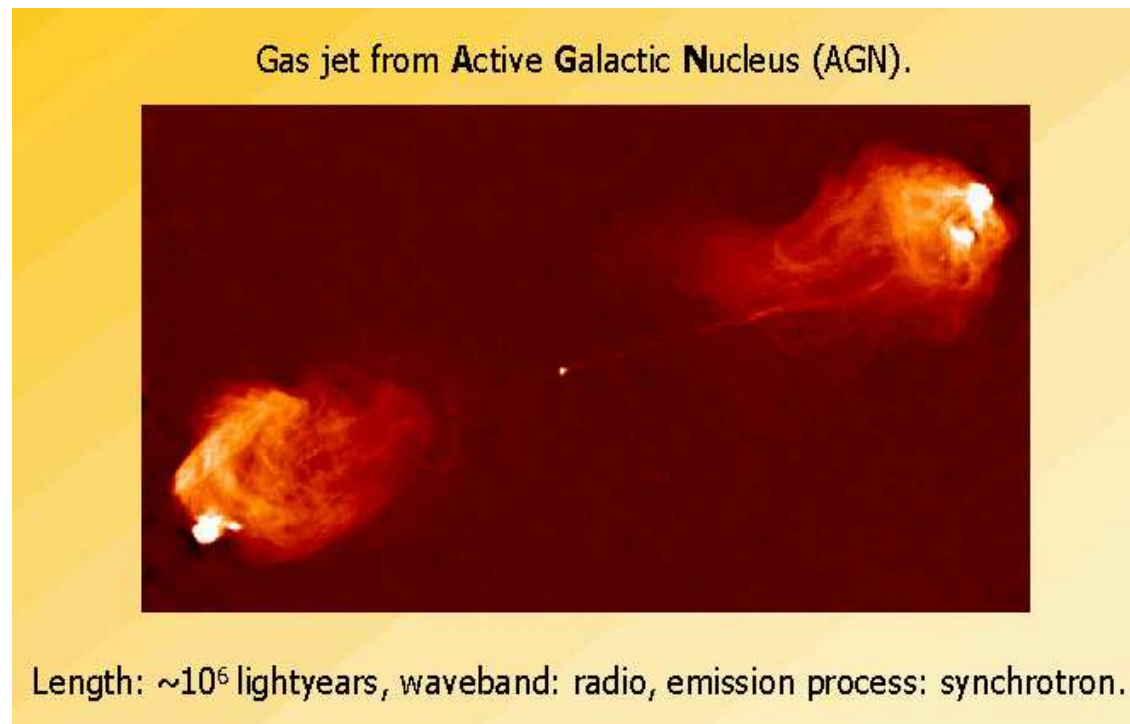
«Поскольку гидромеханика включает в себя физику двух из трех самых общих состояний материи — жидкого и газообразного, то излишне объяснять, почему еще одну или даже несколько книг следует посвятить этому предмету».

С тех пор прошло более полувека, многое изменилось и в мире вокруг нас, и в науке, появилось даже новое, четвертое, состояние вещества — плазма. Оказалось, однако, что и это новое состояние вещества при определенных условиях допускает гидродинамическое описание. Гидродинамика работает в огромном диапазоне масштабов — от течения крови в мельчайших капиллярах и движения жидкости в микроэлектромеханических устройствах (MEMS) до галактических струй.

Общим условием применимости такого континуального описания, при котором среду рассматривают как непрерывный континуум, забывая о микроскопической молекулярной структуре жидкостей и газов, является малость числа Кнудсена Kn — безразмерного параметра, определяемого как отношение средней длины свободного пробега молекул между столкновениями ℓ к характерному размеру L , встречающему в данной задаче:

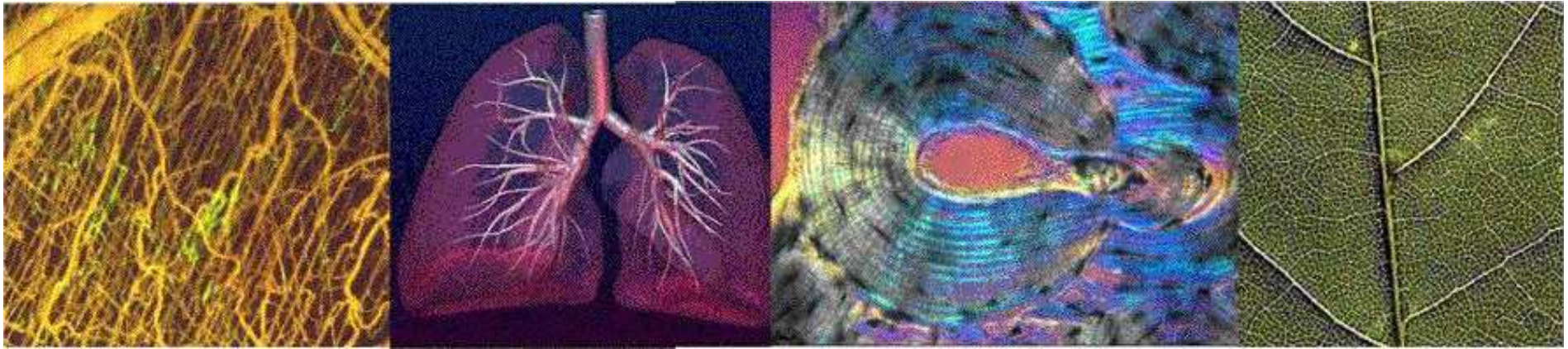
$$Kn = \ell/L \ll 1.$$



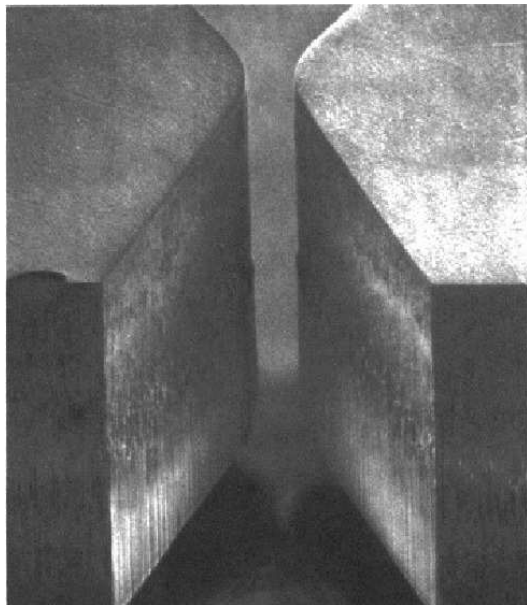


Струя газа из активного ядра галактики в созвездии Лебедя

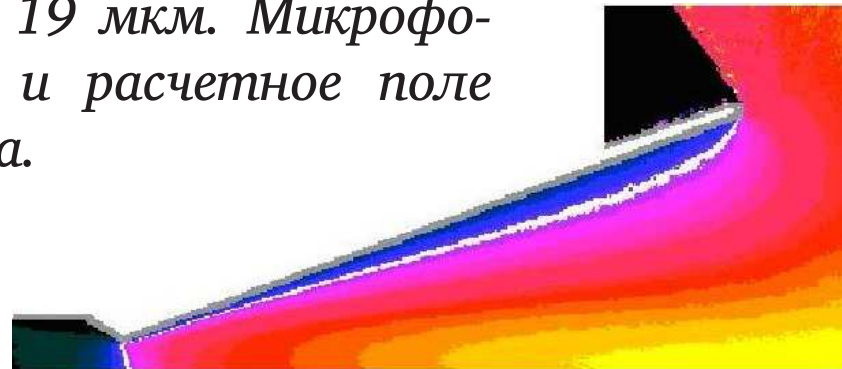
Две симметричные струи горячих быстрых частиц (электрон-позитронной плазмы) генерируются в центральных областях радиогалактики Лебедь А, содержащих, вероятно, сверхмассивную черную дыру. Распространяясь от источника, струи взаимодействуют с межгалактической средой, что приводит к формированию интенсивной ударной волны в межгалактической среде и появлению на концах струй двух ярких радиоисточников.



Некоторые биологические микротечения. Слева направо: кровеносная система животного, легкие, капилляры в костной ткани, лист растения



Плоское микросопло с шириной горла 19 мкм. Микрофотография и расчетное поле чисел Маха.



- **Зачем нужна вычислительная гидродинамика?** К сожалению (или к счастью!?) уравнения гидродинамики нелинейны. Это означает, что лишь в очень редких случаях можно найти их аналитическое решение. Таким образом, использование численных методов при решении задач гидродинамики абсолютно необходимо. Почти фантастически быстрый рост быстродействия и объема памяти ЭВМ, создание все более «умных» алгоритмов — все это привело к бурному развитию вычислительной гидродинамики и надеждам, что в не столь далеком будущем компьютерные расчеты заменят дорогостоящие эксперименты в аэродинамических трубах. Сегодня программы для расчета течений жидкостей и газа — это не только наука, это также коммерческий продукт, который активно продается, покупается и используется в очень многих отраслях промышленности.

- **В чем состоит цель данных лекций?** Настоящие лекции посвящены довольно узкой области вычислительной гидродинамики — тому, что можно назвать вычислительной аэродинамикой сверхзвуковых течений. Эта область является основой для развития авиационной и космической техники. Главной особенностью сверхзвуковых течений является появление газодинамических разрывов — ударных волн и контактных поверхностей. Следовательно, для численного моделирования подобных течений требуются методы, позволяющие приближенно находить такие разрывные решения. Это нетривиальная математическая проблема. В настоящее время наиболее популярными методами решения подобных задач являются конечноразностные TVD (total variation diminishing) и ENO (essentially non-oscillatory) схемы. О них и будет рассказываться в наших лекциях.

Немного истории



1917 г. Первая попытка Л. Ф. Ричардсона предсказать погоду путем численного решения (вручную!) уравнений в частных производных.

«Пока что я платил за расчет одного координатного узла лапласиана по расценке $n/18$ пенсов, где n — число цифр, с которыми проводятся вычисления. Основная ошибка вычислителей состояла в том, что они путали знаки «плюс» и «минус». Что касается скорости расчетов, то один из самых быстрых работников рассчитывал за неделю в среднем 2000 узлов лапласиана с трехзначными числами; ошибочные расчеты не оплачивались.»



1950 г. После создания ЭВМ, они были почти немедленно использованы для численного решения задач гидромеханики. Для рассматриваемого нами предмета особый интерес представляет статья Дж. фон Неймана и Р. Рихтмайера, в которой они предложили использовать явную искусственную вязкость для расчета течений с ударными волнами. Это было началом развития методов сквозного счета.



1959 г. Первая открытая публикация С. К. Годунова, в которой была описана знаменитая схема Годунова, основанная на решении задачи о распаде разрыва. Эта схема и ее почти бесчисленные модификации и модернизации были успешно применены к огромному количеству различных задач. Она лежит в основе практически всех современных методов численного моделирования течений с ударными волнами.

*”Professor S.K. Godunov’s work influences all of modern scientific computation ...He is perhaps the most influential applied mathematician working in this area for the past forty years“
S. Osher*



1983 г. В статье А. Хартена предложены TVD (total variation diminishing) схемы, быстро завоевавшие популярность и являющиеся сейчас, пожалуй, основным рабочим инструментом, применяемым учеными, работающими в области вычислительной аэродинамики. Именно эти схемы используются и в большинстве известных коммерческих кодов.

Расчет течений с разрывами

- Основной особенностью задач сверхзвуковой аэродинамики является наличие газодинамических разрывов — ударных волн и контактных поверхностей, что приводит к необходимости введения математической концепции обобщенного (слабого) решения.
- Приближенный расчет таких решений является весьма нетривиальной задачей численного анализа.

Существуют два основных подхода к расчету течений с газодинамическими разрывами:

- **Метод выделения особенностей.** Разрывы выделяются и служат границами расчетной области и внутренними границами, на которых выполняются условия Рэнкина-Гюгонио. Положение и движение границ определяется в процессе решения. Алгоритм становится очень запутанным, когда рассматриваются течения со сложным взаимодействием разрывов (особенно в многомерных задачах).
- **Метод сквозного счета.** Разрывы размазываются искусственной вязкостью на несколько расчетных ячеек. Расчет во всей области ведется по одной и той же схеме. Только такие методы рассматриваются и применяются ниже.

Методы сквозного счета

- **1950 г.** Основная идея методов сквозного счета сформулирована Дж. фон Нейманом и Р. Рихтмайером.
- **1953–1959 г.** С. К. Годунов предложил метод, основанный на использовании решения задачи о распаде разрыва. Схема Годунова лежит в основе почти современных методов численного моделирования течений с ударными волнами.
- **1954 г.** Схема Лакса (P. Lax).
- **1960 г.** Схема Лакса–Вендроффа (P. Lax & B. Wendroff).
- **1969 г.** Схема Маккормака (R. McCormack).
- **1960-1970 гг.** В СССР сформировались крупные научные школы в области численного решения задач сверхзвуковой аэродинамики:
 - С. К. Годунова (метод, основанный на решении задачи о распаде разрыва)
 - Н. Н. Яненко (методы расщепления и дробных шагов)
 - А. А. Самарского (полностью консервативные разностные схемы)
 - О. М. Белоцерковского (метод крупных частиц)

Схемы высокого разрешения

- **1972, 1975 г.** В. П. Колганом разработана первая квазимонотонная схема повышенного порядка точности, основанная на принципе минимума значений производных.
- **1974, 1977, 1979 г.** Попытки Б. ван Леера (B. van Leer) построить (квази)монотонную схему второго порядка с помощью ограничения значений производных вблизи разрывов.
- **1983 г.** В статье А. Хартена (A. Harten) предложены TVD (Total Variation Diminishing) схемы, быстро завоевавшие популярность и являющиеся, вплоть до настоящего времени, основным инструментом вычислителей, работающих в области сверхзвуковой аэродинамики.
- **1987–1996 г.** В работах А. Хартена, С. Ошера (S. Osher), Ч.-В. Шу (C.-S. Shu) и др. развиты ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted ENO) схемы высокого разрешения. Эти схемы могут стать базовым вычислительным инструментом в новом поколении расчетных программ для решения сложных задач вычислительной аэродинамики.

Гиперболические системы уравнений

- Макроскопические движения сжимаемого газа описываются системой уравнений Навье—Стокса, которые могут быть получены из законов сохранения массы, импульса и энергии. Если пренебречь входящими в эти уравнения вязкими (диффузионными) членами, оставив только члены, ответственные за конвективный перенос и силы нормального давления, то приходим к системе уравнений Эйлера. При численном моделировании основные *принципиальные* сложности возникают именно при решении этих невязких уравнений. Метод, пригодный для решения уравнений Эйлера, обычно может быть довольно просто распространен и на уравнения Навье—Стокса (скажем, аппроксимируя диффузионные члены центральными разностями). При решении уравнений Навье—Стокса (особенно при больших числах Рейнольдса) возникают, однако, сложности иного рода, связанные с наличием тонких пограничных и свободных сдвиговых слоев и турбулизацией течения.

- С математической точки зрения наиболее важной особенностью уравнений Эйлера является то, что они составляют гиперболическую систему законов сохранения. Гиперболические уравнения встречаются во многих областях математической физики, фактически они появляются при описании любых физических процессов, для которых характерно распространение информации с конечной скоростью. Важной особенностью гиперболических уравнений, появляющихся в аэрогидродинамике, является их нелинейность. Таким образом, в этих лекциях будут рассматриваться методы численного решения нелинейных гиперболических уравнений. Хотя изложение будет вестись в основном применительно к уравнениям аэрогидродинамики, большая часть рассматриваемых численных подходов может быть использована (и действительно используется) и при решении гиперболических уравнений, возникающих в других областях науки.

Системы законов сохранения

Рассмотрим следующую квазилинейную систему n уравнений от $d + 1$ независимого переменного:

$$\mathbf{U}_t + \sum_{i=1}^d \partial \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) / \partial x_i = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathfrak{R}^n$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathfrak{R}^d \times \mathfrak{R}$, $\mathbf{F}_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ и $\mathbf{F}_i \in C^2$.

Такая система, записанная в дивергентной форме, называется *системой законов сохранения*. Она может быть переписана в неконсервативной форме как

$$\mathbf{U}_t + \sum_{i=1}^d A_i \partial \mathbf{U} / \partial x_i = 0, \quad \text{где} \quad A_i = \partial \mathbf{F}_i / \partial \mathbf{U}. \quad (2)$$

Гиперболические системы законов сохранения

Определение. Система (1) или (2) называется гиперболической в точке (\mathbf{x}, t) , если для любого единичного вектора $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ матрица $A = \sum_{i=1}^d n_i A_i$ имеет n вещественных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и соответствующий набор n линейно независимых правых собственных векторов \mathbf{r}_i . Она будет строго гиперболической, если все λ_i различны.

В этом случае матрица A может быть преобразованием подобия приведена к диагональному виду:

$$A = R\Lambda R^{-1},$$

где $R = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ — матрица, столбцы которой являются (правыми) собственными векторами матрицы A ,

$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы A .

Уравнения Эйлера

В частности, легко проверить гиперболичность трехмерных ($d = 3$) уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = 0,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E + p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E + p)w \end{bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right).$$

Здесь ρ — плотность, u , v и w — компоненты скорости вдоль осей x , y и z , соответственно, p — давление, E — полная энергия на единицу объема, γ — показатель адиабаты, равный отношению удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме (для двухатомных газов в довольно широком диапазоне температур γ постоянно и равно 1,4).

Эти уравнения, однако, не являются строго гиперболическими: соответствующие собственные значения равны,

$$\lambda_1 = u_n - a, \quad \lambda_{2,3,4} = u_n \quad \lambda_5 = u_n + a.$$

Здесь $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = n_x u_x + n_y v + n_z w$ — составляющая скорости вдоль единичного вектора $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$, $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука. Таким образом одно из собственных значений является троекратно вырожденным.

При построении численных методов для решения задач сверхзвуковой аэродинамики свойство гиперболичности трехмерных уравнений Эйлера, как это ни странно, практически не используется. Для этих целей гораздо более важным является свойство гиперболичности одномерных ($d = 1$) уравнений Эйлера.

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = 0, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ (E + p)m/\rho \end{bmatrix},$$

$$m = \rho u, \quad p = (\gamma - 1)(E - m^2/2\rho).$$

Перепишем их в неконсервативной форме:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0, \quad \mathbf{A} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \frac{\gamma Eu}{\rho} & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}.$$

Проведем для данной системы уравнений соответствующие вычисления, найдя собственные значения и собственные векторы. Вычисления можно упростить, перейдя от консервативных переменных \mathbf{U} к так называемым примитивным переменным $\mathbf{W} = (\rho, u, p)$.

Очевидно, формулы преобразования имеют вид

$$d\mathbf{U} = \mathbf{K}d\mathbf{W}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u & 1/(\gamma-1) \end{bmatrix}.$$

Таким образом мы получаем

$$\mathbf{K}\mathbf{W}_t + \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{W}_x = 0, \quad \mathbf{W}_t + \mathbf{B}\mathbf{W}_x = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы \mathbf{B} .

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = (u - \lambda)^3 - (u - \lambda)\gamma p/\rho = 0$$

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a.$$

Три полученных собственных значения соответствуют трем модам возмущений, распространяющимся каждая со своей скоростью. Значение u соответствует возмущениям, распространяющимся со скоростью течения самого газа, то есть неподвижным относительно его частиц, а значения $u \pm a$ — возмущениям, движущимся относительно газа со скоростью a соответственно влево и вправо, то есть акустическим волнам.

Соответствующие собственные векторы матрицы B равны

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -a/\rho \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a/\rho \\ a^2 \end{bmatrix}.$$

Составленная из них матрица

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 0 & a \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

удовлетворяет матричному уравнению $BQ = Q\Lambda$, где Λ — диагональная матрица, составленная из собственных значений:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u - a & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u + a \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица B может быть разложена следующим образом (приведена к диагональному виду):

$$B = Q\Lambda Q^{-1}.$$

Это позволяет преобразовать систему уравнений к так называемому характеристическому виду:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}_x = 0, \quad \mathbf{V}_t + \Lambda\mathbf{V}_x = 0, \quad d\mathbf{V} = \mathbf{Q}^{-1}d\mathbf{W}.$$

Система в характеристическом виде распадается от отдельные, не связанные друг с другом уравнения для компонент $\mathbf{V} \equiv (v_1, v_2, v_3)^T$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

В характеристической форме одномерные уравнения Эйлера принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \rho a \frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho a \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \left(\frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a \frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к исходным консервативным переменным

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0.$$

Поскольку $\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}$, то из уравнения $\mathbf{B}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$ следует, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{K}\mathbf{Q}) = (\mathbf{K}\mathbf{Q})\mathbf{\Lambda}.$$

Таким образом, переход от консервативных к примитивным переменным не изменяет собственных значений. Что же касается собственных векторов, то матрица собственных векторов для системы в консервативных переменных $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^T$ получается из матрицы \mathbf{Q} простым умножением на \mathbf{K} : $\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$. Это дает

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix}$$

Здесь $H = \frac{E + p}{\rho} \equiv \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}$ — так называемая полная энтальпия.

Другие примеры гиперболических уравнений

- Самое, пожалуй, известное гиперболическое уравнение — это волновое уравнение, описывающее распространение света и звука:

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

В одномерном случае $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \quad \begin{cases} v_t + cv_x = 0 \\ u_t - cu_x = v \end{cases}$$

Таким образом, одномерное волновое уравнение можно переписать как систему двух уравнений первого порядка.

- Самое простое гиперболическое уравнение — уравнение переноса

$$u_t + au_x = 0.$$

Как следует из выписанной выше «факторизации» одномерного волнового уравнения, оно фактически эквивалентно системе двух уравнений переноса, описывающих распространение волн, соответственно, вправо и влево.

- Очень полезным гиперболическим уравнением является невязкое уравнение Бюргерса (его еще называют уравнением Хопфа):

$$u_t + uu_x = 0.$$

В отличие от волнового уравнения и уравнения переноса, оно нелинейно. Важность уравнения Бюргерса заключается в том факте, что оно является полезным примером, иллюстрирующим многие проблемы, возникающие при решении более сложных нелинейных гиперболических уравнений, в частности уравнений газовой динамики. В дальнейшем мы будем часто его использовать в данном качестве.

- *Стационарные* уравнения Эйлера для сверхзвукового течения также являются гиперболическим (в то время как для дозвукового течения — эллиптическими). Это позволяет использовать при расчете чисто сверхзвуковых невязких течений т. н. *маршевые методы*, в которых стационарные уравнения интегрируются вдоль одной из координат точно так же, как нестационарные уравнения интегрируются по времени.

- Уравнения мелкой воды, описывающие распространение длинных волн на поверхности тонкого слоя жидкости при наличии силы тяжести. Эти уравнения совпадают с *изэнтропическими* уравнениями Эйлера при показателе адиабаты $\gamma = 2$.
- Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн.
- Уравнения теории упругости, описывающие волны в деформируемом твердом теле.
- Уравнения идеальной магнитной газовой динамики, описывающие, при некоторых предположениях, движение проводящего газа (или плазмы) в магнитном поле.
- ...А также многие, многие другие!. Таким образом, значение тех численных методов, что мы будем изучать, выходит за пределы вычислительной аэродинамики. Они могут быть использованы (и действительно, используются), во многих областях науки, всюду, где встречаются системы гиперболических уравнений.