
Лекция 7.
НАХОЖДЕНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Два подхода к нахождению слабых решений

- **Схемы с выделением разрыва (shock-fitting schemes).** Счет по разностной схеме производится только в областях между разрывами. Разрывы выделяются и служат границами расчетной области и внутренними границами, поперек которых выполняются условия Рэнкина-Гюгонио. Положение и движение разрывов определяется в процессе решения. Алгоритм расчета становится очень сложным и практически неприменимым в тех случаях, когда рассматриваются течения со сложным взаимодействием газодинамических разрывов, где разрывы могут появляться, ветвиться и исчезать. Это особенно верно при расчете двумерных и трехмерных течений.
- **Схемы сквозного счета (shock-capturing schemes).** Расчет ведется по одной той же схеме во всей расчетной области. Разрывы размазываются на несколько расчетных ячеек.

Осцилляции

Пример. $u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0,$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

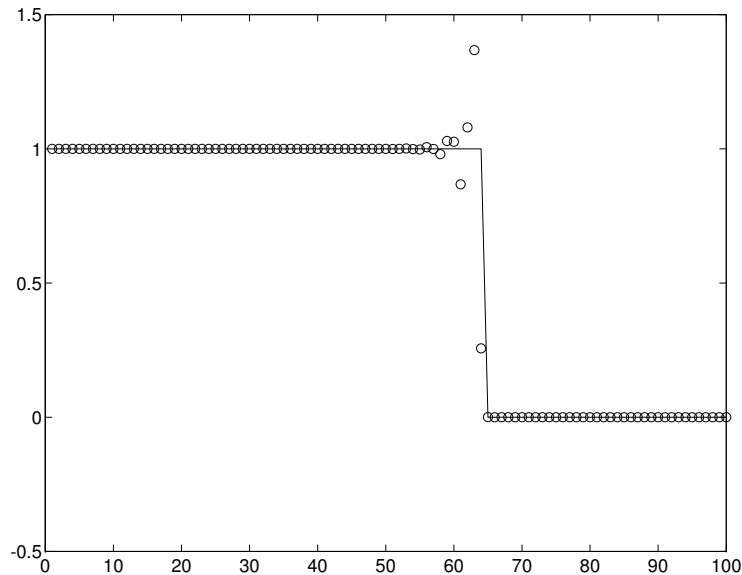


Схема Маккормака

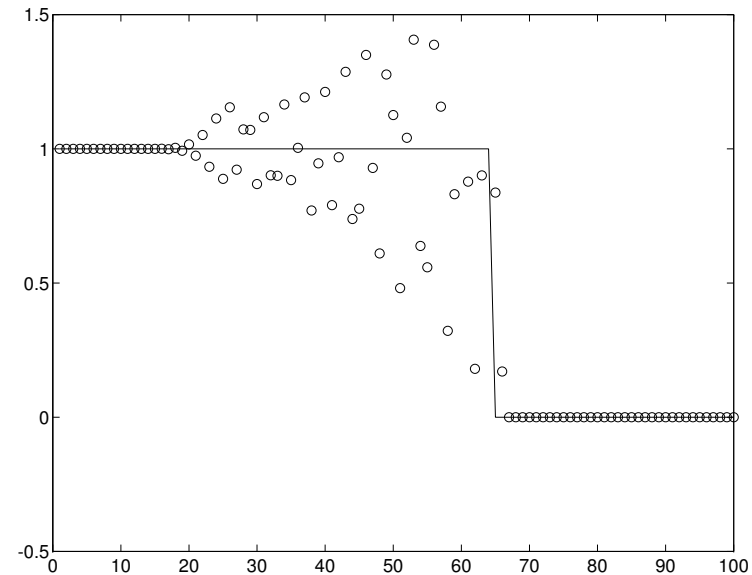


Схема с перешагиванием

Скорость сходимости

Если мы будем вычислять ошибку в норме L_1 :

$$\|v\| = \int_{-\infty}^{\infty} |v| dx \approx h \sum_j |V_j|,$$

то не получим скорости сходимости, ожидаемой исходя из формального порядка схем. Это неудивительно, поскольку формальный порядок определяется с помощью разложения решения в ряд Тэйлора. Такое разложение явно несправедливо для разрывных решений.

В случае линейных уравнений, можно показать, для весьма широкого класса начальных данных, что методы «первого порядка» сходятся со скоростью $O(\Delta t^{1/2})$, тогда как методы «второго порядка» — в лучшем случае как $O(\Delta t^{2/3})$.

Дифференциальные приближения

Причины «размазывания» ударных волн (в случае схем первого порядка) и возникновения осцилляций (для схем второго порядка) можно понять рассматривая так называемые дифференциальные приближения разностных схем.

Пример 1. Разности против потока.

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + a \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$U_t + \frac{\Delta t}{2} U_{tt} + aU_x - a \frac{\Delta x}{2} U_{xx} = 0, \quad u_{tt} = -au_{xt} = a^2 u_{xx},$$

$$U_t + aU_x = \frac{a\Delta x}{2} \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) U_{xx}.$$

Коэффициент при второй производной — численная вязкость. Она положительна при выполнении условия Куранта—Фридрихса—Леви.

Пример 2. Разности по потоку.

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + a \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$$

$$U_t + \frac{\Delta t}{2} U_{tt} + aU_x + a \frac{\Delta x}{2} U_{xx} = 0, \quad u_{tt} = -au_{xt} = a^2 u_{xx},$$

$$U_t + aU_x = -\frac{a\Delta x}{2} \left(1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) U_{xx}.$$

Пример 3. Схема с перешагиванием.

$$u_t + au_x = 0, \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$U_t + \frac{\Delta t^2}{6} U_{ttt} + aU_x - a \frac{\Delta x^2}{6} U_{xxx} = 0, \quad u_{ttt} = -au_{xxt} = -a^3 u_{xxx},$$

$$U_t + aU_x = \frac{a\Delta x^2}{6} \left(\frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} - 1 \right) U_{xxx} = 0$$

Нарушение энтропийного условия

Пример. $u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

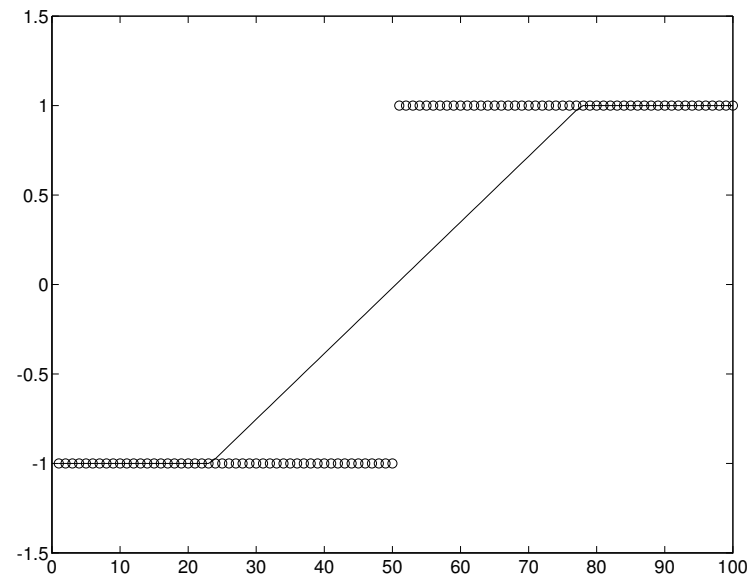


Схема Маккормака.

В данном случае схема сходится к слабому решению закона сохранения, но к слабому решению, не удовлетворяющему энтропийному условию.

Непригодность неконсервативных схем

Пример. $u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

Рассмотрим разностную схему

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n), \quad U_j^0 = \begin{cases} 1, & j < 0 \\ 0, & j \geq 0 \end{cases}$$

Легко проверить, что $U_j^n = U_j^0$ для всех j и n !

В данном примере сходимость вовсе отсутствует, разрыв в решении распространяется с неверной скоростью.

Итак, при попытке найти численно слабые решения законов сохранения мы сталкиваемся с целым рядом трудностей:

- сильное сглаживание решения или осцилляции, скорость сходимости не соответствует порядку точности метода;
- сходимость к слабому решению, не удовлетворяющему энтропийному условию;
- полное отсутствие сходимости, разрывы решения распространяются с неверной скоростью.

Консервативные схемы

Существует простой путь избежать последней проблемы и гарантировать сходимость. Он заключается в требовании консервативности разностной схемы.

Консервативная разностная схема:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+q}^n) - F(U_{j-p-1}^n, \dots, U_{j+q-1}^n)],$$

где F — некая функция от $p + q + 1$ аргументов.

В простейшем случае $p = 0, q = 1$,

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)].$$

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t)) dt \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(U_j, U_{j+1}) \sim \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt$$

В случае консервативных схем интегральная форма закона сохранения

$$\int_a^b u(x, t_2) dx = \int_a^b u(x, t_1) dx - \left[\int_{t_1}^{t_2} f(u(b, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(a, t)) dt \right]$$

имеет дискретный аналог:

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{j=J}^K U_j^{n+1} &= \Delta x \sum_{j=J}^K U_j^n - \Delta t \sum_{j=J}^K [F(U_j^n) - F(U_{j-1}^n)] = \\ &= \Delta x \sum_{j=J}^K U_j^n - \Delta t [F(U_K^n) - F(U_J^n)] \end{aligned}$$

Чтобы консервативная схема была согласована с уравнением, необходимо $f(u) = F(u, u, \dots, u)$.

Теорема Лакса–Вендроффа

Пусть нам дана сеточная функция U_j . Обозначим через $U(x)$ кусочно-непрерывную функцию, такую что $U(x) = U_j$ на каждом интервале $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$. Имеет место важная

Теорема Лакса–Вендроффа. Рассмотрим последовательность сеток $\{\mathcal{G}_\ell\}$, для которой $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, когда $\ell \rightarrow \infty$. Пусть $U_\ell(x, t)$ — численная аппроксимация, вычисленная с помощью согласованного с уравнением и консервативного метода на сетке \mathcal{G}_ℓ . Предположим, что при $\ell \rightarrow \infty$ U_ℓ сходится к $u(x, t)$ почти всюду (т.е. за исключением множества меры нуль). Тогда $u(x, t)$ есть слабое решение закона сохранения.

Строго говоря, теорема Лакса–Вендроффа не гарантирует сходимость. Но она гарантирует, что при наличии сходимости численное решение, полученное с помощью консервативной схемы, сходится к тому, «к чему надо».

Вместо сходимости почти всюду можно потребовать следующих двух условий

1. Над каждым ограниченным $\Omega = [a, b] \times [0, T]$

$$\int_0^T \int_a^b |U_\ell(x, t) - u(x, t)| \, dx dt \rightarrow 0, \quad \text{когда } \ell \rightarrow \infty.$$

2. Для каждого T существует $R > 0$, такое что

$$TV(U_\ell(x, t)) < R, \quad \text{для всех } 0 \leq t \leq T, \ell = 1, 2, \dots$$

Полная вариация функции определяется как

$$TV(v) = \sup \sum_{j=1}^N |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1})|,$$

где \sup берется по всем разбиениям вещественной прямой

$$-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = \infty.$$

Для дифференцируемых функций

$$TV(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |v'(x)| \, dx.$$

Некоторые консервативные схемы

- **Схема Лакса–Фридрикса.**

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)).$$

$$F(U_j, U_{j+1}) = \frac{1}{2}(f(U_j) + f(U_{j+1})) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_{j+1} - U_j)$$

- **Схема Лакса–Вендроффа.**

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)).$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(U_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{j-1/2}^{n+1/2})).$$

- **Схема Маккормака.**

$$U_j^* = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)).$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_j^*) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_j^*) - f(U_{j-1}^*)).$$

Дискретное энтропийное условие

Если разностный метод дает решение, которое удовлетворяет дискретному энтропийному условию

$$\frac{E(u_j^{n+1}) - E(u_j^n)}{\Delta t} + \frac{H(u_{j-q+1}^n, \dots, u_{j+p+1}^n) - H(u_{j-q}^n, \dots, u_{j+p}^n)}{\Delta x} \leq 0$$

с численным энтропийным потоком H , который согласован с энтропийным потоком дифференциального уравнения F

$$H(u, \dots, u) = F(u), \quad F'(u) = E'(u)f'(u)$$

тогда u_j^n сходится к некоторому пределу, то он будет удовлетворять условию

$$E(u)_t + F(u)_x \leq 0$$

Современные схемы сквозного счета

В значительной части современных схем сквозного счета вычисления можно разбить на три более или менее независимых этапа.

MUSCL TVD схемы:

- Реконструкция переменных на двух сторонах («левой» и «правой») грани расчетных ячеек. В простейшем случае схемы первого порядка это делается с помощью кусочно-линейной интерполяции.
- Вычисление, исходя из реконструированных переменных, потоков через грани ячеек. Обычно это делается путем приближенного решения задачи о распаде разрыва между «левым» и «правым» состояниями.
- Нахождения значений переменных на новом временном слое — средних по ячейкам (в конечнообъемных методах) или в центре ячейки (в конечноразностных методах). При этом используются значения переменных на старом временном слое и вычисленные потоки через грани ячеек.

не-MUSCL TVD схемы:

- Вычисления потоков с первым порядком точности исходя из известных значений переменных в центрах ячеек или средних по ячейкам.
- Построение потоков более высокого порядка, используя вычисленные значения на нескольких соседних гранях.
- Нахождения значений переменных на новом временном слое — средних по ячейкам (в конечнообъемных методах) или в центре ячейки (в конечно-разностных методах). При этом используются значения переменных на старом временном слое и вычисленные потоки через грани ячеек.