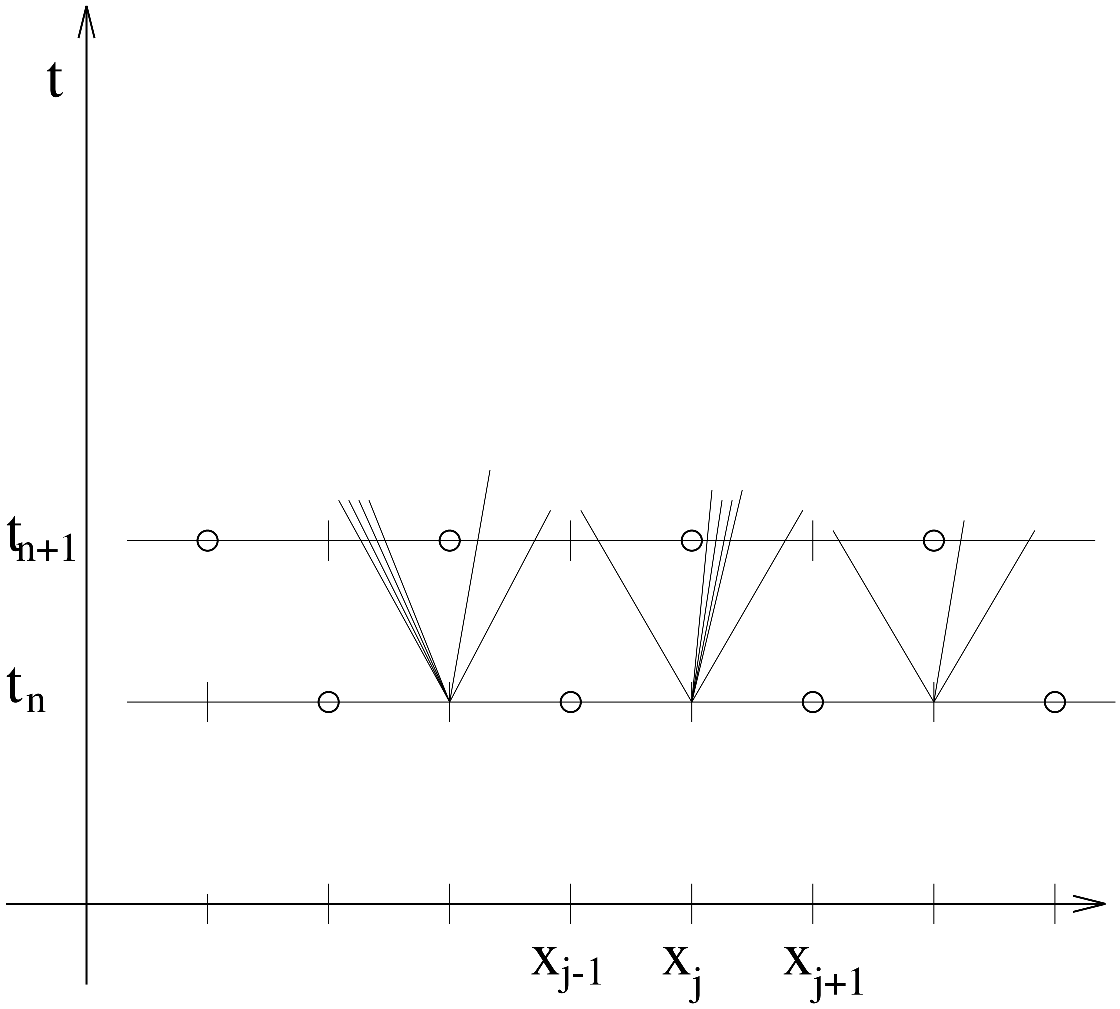
Лекция 9.

СХЕМА ГОДУНОВА

Схема Годунова



Используя численное решение U_j^n в момент времени t_n, определяем кусочно-постоянную функцию $U(x) = \tilde{u}(x, t_n)$. Далее, находим на некотором малом интервале времени точное решение $\tilde{u}(x, t)$ задачи с этими начальными данными. Для этого решаются задачи о распаде разрыва на каждой границе между соседними расчетными ячейками (т.е. между состояниями U_j^n и U_j^{n+1}). Приближенное решение в момент времени t_{n+1} определяется как среднее от точного решения по ячейкам:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n+1})\, dx.$$

Это среднее легко вычислить, используя интегральную форму законов сохранения и то, что $\tilde{u}$ — точное решение:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n+1})\, dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n})\, dx +$$
$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j-1/2}, t))\, dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t))\, dt$$

Схема Годунова

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)\right],$$

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t))\, dt$$

Решение задачи о распаде разрыва автомодельно и постоянно вдоль любого луча. Постоянное значение $\tilde{u}$ вдоль линии $x = x_{j+1/2}$ обозначим через u^*, оно зависит только от U_j^n и U_{j+1}^n. Численный поток сводится к

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)),$$

так что окончательно получаем для схемы Годунова:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) - f(u^*(U_{j-1}^n, U_j^n))\right].$$

Очевидно, что поток согласован: $U_j^n = U_{j+1}^n \equiv \tilde{u} \quad \Rightarrow \quad u^*(U_j^n, U_{j+1}^n) = \tilde{u}.$

Шаг по времени должен быть достаточно мал, чтобы волны, возникающие из распада разрывов на соседних гранях, не взаимодействовали друг с другом. Поскольку скорости волн ограничены собственными значениями матрицы Якоби, достаточно потребовать, чтобы

$$|\Delta t \lambda_p(U_j^n)/\Delta x| \leq 1$$

для всех λ_p при каждом U_j^n (условие Куранта-Фридрихса-Леви, CFL).

Одномерные уравнения Эйлера

$$\begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} m \\ \rho u^2 + p \\ (E+p)u \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad m = \rho u, \quad p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{\rho u^2}{2}\right)$$

Собственные значения $\quad \lambda_1 = u - a,\ \lambda_2 = u,\ \lambda_3 = u + a, \quad$ где $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$.

Собственные векторы $\quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix},$

$$H = \frac{E+p}{\rho} \equiv \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

Легко проверить, что характеристические поля 1 и 3 — истинно нелинейные, а поле 2 — линейно вырожденное:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \nabla\lambda_1 = -(\gamma+1)\frac{a}{\rho} \neq 0, \qquad \mathbf{r}_2 \cdot \nabla\lambda_2 \equiv 0, \qquad \mathbf{r}_3 \cdot \nabla\lambda_3 = (\gamma+1)\frac{a}{\rho} \neq 0.$$

Условия Рэнкина-Гюгонио

$$s[\rho] = [m], \quad s[m] = [\rho u^2 + p], \quad s[E] = [u(E+p)],$$

или, введя, $v = u - s$

$$[\rho v] = 0, \quad [\rho v^2 + p] = 0, \quad \left[\frac{2a^2}{\gamma - 1} + v^2\right] = 0$$

Условия через волну разрежения:

$$\mathbf{r}_k \cdot \nabla w_k = 0$$

Для 1-го семейства характеристик:

$$w_1^{(1)} = u + \frac{2a}{\gamma - 1}, \quad w_1^{(2)} = p\rho^{-\gamma} \qquad \Rightarrow$$

$$u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} = u_R + \frac{2a_R}{\gamma - 1}, \quad p_L\rho_L^{-\gamma} = p_R\rho_R^{-\gamma}$$

Для 2-го семейства характеристик (контактного разрыва):

$$w_2^{(1)} = u, \quad w_2^{(2)} = p \qquad \Rightarrow$$

$$u_L = u_R, \quad p_L = p_R$$

Для 3-го семейства характеристик:

$$w_3^{(1)} = u - \frac{2a}{\gamma - 1}, \quad w_3^{(2)} = p\rho^{-\gamma} \qquad \Rightarrow$$

$$u_L - \frac{2a_L}{\gamma - 1} = u_R - \frac{2a_R}{\gamma - 1}, \quad p_L\rho_L^{-\gamma} = p_R\rho_R^{-\gamma}$$

Ударные волны и волны разрежения

Для 1-го семейства характеристик: $p_L < p_R$ для ударных волн
$p_L > p_R$ для волн разрежения

Для 3-го семейства характеристик: $p_L > p_R$ для ударных волн
$p_L < p_R$ для волн разрежения

Для контактного разрыва: $p_L = p_R$

Рассмотрим характеристическое поле 1, Для ударной волны справедливо энтропийное условие

$$u_L - a_L > s > u_R - a_R, \quad s < u_R \qquad \Rightarrow \qquad v_L > a_L, \quad v_R > 0, \quad v_R < a_R$$

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\, a_L^2 < \frac{2a_L^2}{\gamma-1} + v_L^2 = \frac{2a_R^2}{\gamma-1} + v_R^2 < \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\, a_R^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_L < a_R.$$

$$0 < \frac{a_R^2}{\gamma-1} - \frac{a_L^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2}\left(v_L^2 - v_R^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad v_L > v_R.$$

$$p_L - p_R = \rho_R v_R^2 - \rho_L v_L^2 = \rho_L v_L (v_R - v_L) < 0.$$

Для волны разрежения $u_L - a_L < u_R - a_R$ (голова волны распространяется быстрее, чем ее хвост).

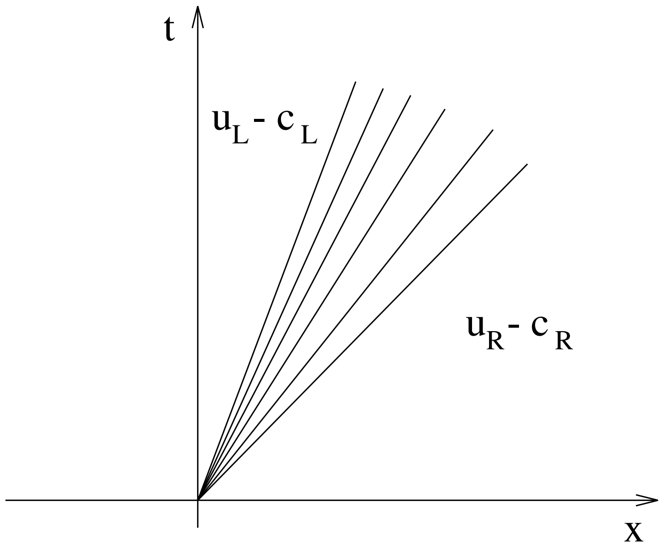
Из постоянства одного из инвариантов Римана имеем

$$p_R/p_L = (\rho_R/\rho_L)^\gamma, \quad \text{или} \quad p_R/p_L = (a_R/a_L)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Второй инвариант Римана дает

$$u_L - a_L + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\, a_L = u_L + \frac{2a_L}{\gamma-1} = u_R + \frac{2a_R}{\gamma-1} =$$
$$= u_R - a_R + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\, a_R > u_L - a_L + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\, a_R \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a_L > a_R \quad \Rightarrow \quad p_L > p_R.$$

Ударные волны и волны разрежения

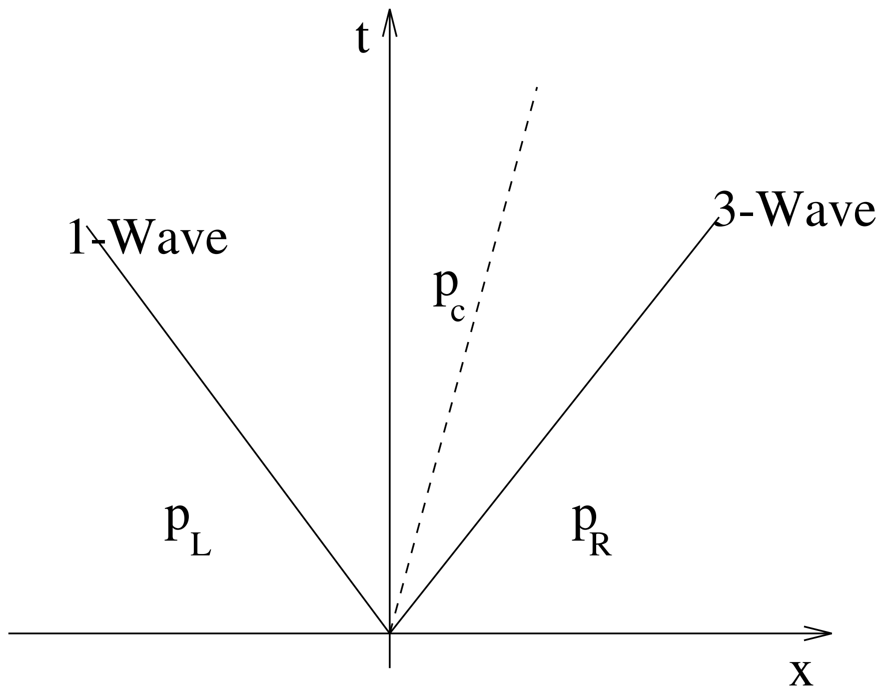


Доказательство для характеристического поля 3 проводится аналогично.

Для контактного разрыва давление — инвариант Римана и, следовательно, не изменяется поперек него.

Задача Римана в газовой динамике

$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0 \\ \mathbf{u}_R, & x > 0 \end{cases}$$



Волны в первом и третьем характеристических полях — либо ударные волны, либо волны разрежения. Средняя волна — всегда контактный разрыв.

Давление p_c находится с помощью итерационной процедуры. Остальные величины после этого вычисляются из явных формул.

Единственное решение задачи о распаде разрыва в газовой динамике существует при условии

$$u_R - u_L < \frac{2}{\gamma - 1}\left(a_L + a_R\right)$$