Лекция 10.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА

Приближенный солвер Роу

Решение задачи о распаде разрыва $\tilde{u}(x,t) = \tilde{w}(x/t)$ может быть найдено одним из приближенных солверов. Естественный подход использовать для этого локальную линеаризацию.

$$\tilde{\mathbf{u}}_t + \tilde{\mathsf{A}}\,\tilde{\mathbf{u}}_x = 0$$

Разложим разность $\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L$ по собственным векторам матрицы $\tilde{\mathsf{A}}$:

$$\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = \sum_p \alpha_p \tilde{\mathbf{r}}_p, \qquad \text{тогда} \qquad \tilde{\mathbf{w}}(x/t) = \mathbf{u}_L + \sum_{\lambda_p < x/t} \alpha_p \tilde{\mathbf{r}}_p = \mathbf{u}_R - \sum_{\lambda_p > x/t} \alpha_p \tilde{\mathbf{r}}_p$$

Как выбрать матрицу $\tilde{\mathsf{A}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$? Роу предложил наложить на нее три условия:

1. $\tilde{\mathsf{A}}\,(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_L)$,
2. $\tilde{\mathsf{A}}$ диагонализуема и имеет вещественные собственные значения,
3. $\tilde{\mathsf{A}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \to \mathbf{f}'(\mathbf{u})$, когда $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R \to u$.

Он показал, что эти условия удовлетворяются, если выбрать матрицу как $\tilde{\mathsf{A}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \mathsf{A}(\tilde{\mathbf{u}})$, где величины в состоянии $\tilde{\mathbf{u}}$ («средние по Роу») вычисляются как

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}\, u_L + \sqrt{\rho_R}\, u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$
$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}\, H_L + \sqrt{\rho_R}\, H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$
$$\tilde{a}^2 = (\gamma - 1)\left(\tilde{H} - \frac{\tilde{u}^2}{2}\right).$$

Численный поток в схеме Роу может быть вычислен как

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{w}(0)) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \sum_{\tilde{\lambda}_p < 0} [\mathbf{f}(\mathbf{u}_p) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{p-1})] =$$
$$= \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \tilde{\mathsf{A}} \sum_{\tilde{\lambda}_p < 0} (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{p-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \tilde{\mathsf{A}} \sum_{\tilde{\lambda}_p < 0} \alpha_p \mathbf{r}_p = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \sum_{\tilde{\lambda}_p < 0} \tilde{\lambda}_p \alpha_p \mathbf{r}_p$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_L,\mathbf{u}_R)=\mathbf{f}(\mathbf{u}_L)+\sum_{p=1}^{n}\tilde{\lambda}_p^-\alpha_p\mathbf{r}_p,\qquad \tilde{\lambda}_p^-=min(\tilde{\lambda}_p,0)=\frac{1}{2}\,(\tilde{\lambda}_p-|\tilde{\lambda}_p|).$$

Аналогично,

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_L,\mathbf{u}_R)=\mathbf{f}(\mathbf{u}_R)-\sum_{p=1}^{n}\tilde{\lambda}_p^+\alpha_p\mathbf{r}_p,\qquad \tilde{\lambda}_p^+=max(\tilde{\lambda}_p,0)=\frac{1}{2}\,(\tilde{\lambda}_p+|\tilde{\lambda}_p|).$$

И наконец,

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_L,\mathbf{u}_R)=\frac{1}{2}\,(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L)+\mathbf{f}(\mathbf{u}_R))-\sum_{p}|\tilde{\lambda}_p|\alpha_p\mathbf{r}_p=\frac{1}{2}\,(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L)+\mathbf{f}(\mathbf{u}_R))-|\tilde{\mathsf{A}}|\,(\mathbf{u}_R-\mathbf{u}_L).$$

Здесь $|\tilde{\mathsf{A}}|=\mathsf{R}|\tilde{\Lambda}|\mathsf{R}^{-1}$. Коэффициенты α_p вычисляются как $\boldsymbol{\alpha}=\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{u}_R-\mathbf{u}_L)$.

Схема Роу принадлежит к классу методов расщепления разности векторов потоков. Она сохраняет без размазывания (в одной счетной ячейке) *стационарную* ударную волну или *стационарный* контактный разрыв.

Энтропийная поправка в звуковой точке

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)\right) - \sum_p |\tilde{\lambda}_p| \alpha_p \mathbf{r}_p = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)\right) - |\tilde{\mathrm{A}}|\,(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)$$

Матрица $|\tilde{\mathrm{A}}|$ в схеме Роу может рассматриваться как матрица численной диссипации. Очевидно, что диссипация обращается в нуль в тех точках, где равны нулю собственные значения. В частности, это может происходить в звуковых точках внутри ударных волн и волн разрежения. В результате могут появиться нефизические решения, нарушающие энтропийное условие — ударные волны разрежения. Чтобы избежать этого, вводят так называемые энтропийные поправки (entropy fix). Пожалуй, наиболее распространенной является форма энтропийной поправки, предложенная Хартеном и Йи:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)\right) - \sum_p \psi(\tilde{\lambda}_p) \alpha_p \mathbf{r}_p, \qquad \psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| > \epsilon \\ (z^2 + \epsilon^2)/2\epsilon, & |z| < \epsilon \end{cases}$$

Здесь ϵ —малый параметр, величина которого зависит от решаемой задачи.

Метод Стегера-Уорминга расщепления вектора потоков

В методах расщепления вектора потока он разбивается на сумму двух потоков — «положительного» и «отрицательного»:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^{+}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}^{-}(\mathbf{u})$$

При этом собственные значения матрицы $\mathsf{A}^{+} = \partial\mathbf{f}^{+}/\partial\mathbf{u}$ положительны, а собственные значения матрицы $\mathsf{A}^{-} = \partial\mathbf{f}^{-}/\partial\mathbf{u}$ — отрицательны. Численный поток вычисляется как

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \mathbf{f}^{+}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}^{-}(\mathbf{u}_\mathbf{R})$$

Метод расщепления, предложенный Стегером и Уормингом, использует свойство однородности уравнений уравнений Эйлера:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathsf{A}\mathbf{u}, \qquad \mathsf{A} = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}.$$

Это свойство является следствием того, что для уравнений Эйлера

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

В методе Стегера-Уорминга

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathsf{A}^{+}\mathbf{u} + \mathsf{A}^{-}\mathbf{u},$$

$$\mathsf{A}^{+} = (\mathsf{A} + |\mathsf{A}|)/2, \qquad \mathsf{A}^{-} = (\mathsf{A} - |\mathsf{A}|)/2,$$

$$\mathsf{A} = \mathsf{R}\Lambda\mathsf{R}^{-1}, \quad |\mathsf{A}| = \mathsf{R}|\Lambda|\mathsf{R}^{-1}.$$

$$\mathsf{A}^{\pm} = \mathsf{R}\Lambda^{\pm}\mathsf{R}^{-1}, \quad \Lambda^{\pm} = diag\{\lambda_i^{\pm}\}, \quad \lambda_i^{\pm} = (\lambda_i \pm |\lambda_i|)/2.$$

Расщепление Стегера-Уорминга

- **Одномерные уравнения Эйлера.**

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a.$$

$$\mathbf{f}^{\pm} = \frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\pm} + 2(\gamma-1)\lambda_2^{\pm} + \lambda_3^{\pm} \\ (u-a)\lambda_1^{\pm} + 2(\gamma-1)u\lambda_2^{\pm} + (u+a)\lambda_3^{\pm} \\ (H-ua)\lambda_1^{\pm}2 + (\gamma-1)u^2\lambda_2^{\pm} + (H+ua)\lambda_3^{\pm} \end{bmatrix}$$

- **Трехмерные уравнения Эйлера.**

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u, \quad \lambda_5 = u + a.$$

$$\mathbf{f}^{\pm} = \frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\pm} + 2(\gamma-1)\lambda_2^{\pm} + \lambda_5^{\pm} \\ (u-a)\lambda_1^{\pm} + 2(\gamma-1)u\lambda_2^{\pm} + (u+a)\lambda_5^{\pm} \\ v\lambda_1^{\pm} + 2(\gamma-1)v\lambda_2^{\pm} + v\lambda_5^{\pm} \\ w\lambda_1^{\pm} + 2(\gamma-1)w\lambda_2^{\pm} + w\lambda_5^{\pm} \\ (H-ua)\lambda_1^{\pm}2 + (\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\lambda_2^{\pm} + (H+ua)\lambda_5^{\pm} \end{bmatrix}$$

Метод Ван Леера расщепления вектора потоков

Расщепление Ван Леера было сконструировано так, чтобы выполнялись два важных свойства:

1. «расщепленные» матрицы Якоби $\mathsf{A}^{+} = \partial \mathbf{f}^{+}/\partial \mathbf{u}$, $\mathsf{A}^{-} = \partial \mathbf{f}^{-}/\partial \mathbf{u}$ были непрерывны;
2. для дозвуковых течений расщепленные потоки были вырождены, т.е. одно из собственных значений матриц A^{+}, A^{-} равно нулю.

Определим число Маха (с учетом знака скорости): $M = u/a$.

Если $M > 1$, то течение сверхзвуковое, и все собственные значения положительны.
Тогда возьмем

$$\mathbf{f}^{+} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f}^{-} = 0.$$

Аналогично, для $M < -1$,

$$\mathbf{f}^{+} = 0, \quad \mathbf{f}^{-} = \mathbf{f}.$$

В случае $|M| < 1$ используем тождество $M = ((M+1)^2 - (M-1)^2)/4$. Для первой компоненты вектора потоков можно написать

$$f_1 = \rho u = \rho a M = \rho a((M+1)^2 - (M-1)^2)/4,$$

$$f_1^+ = \rho a(M+1)^2/4,$$

$$f_1^- = -\rho a(M-1)^2/4.$$

Расщепление ван Леера

Подобным же образом расщепляются другие компоненты вектора потоков. Для одномерных уравнений Эйлера получается

$$\mathbf{f}^{\pm} = \pm\frac{1}{4}\rho a(M \pm 1)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2a\left(\frac{\gamma-1}{2}M \pm 1\right)/\gamma \\ 2a^2\left(\frac{\gamma-1}{2}M \pm 1\right)^2/(\gamma^2-1) \end{bmatrix}$$

В случае трехмерных уравнений Эйлера (для потоков в направлении x)

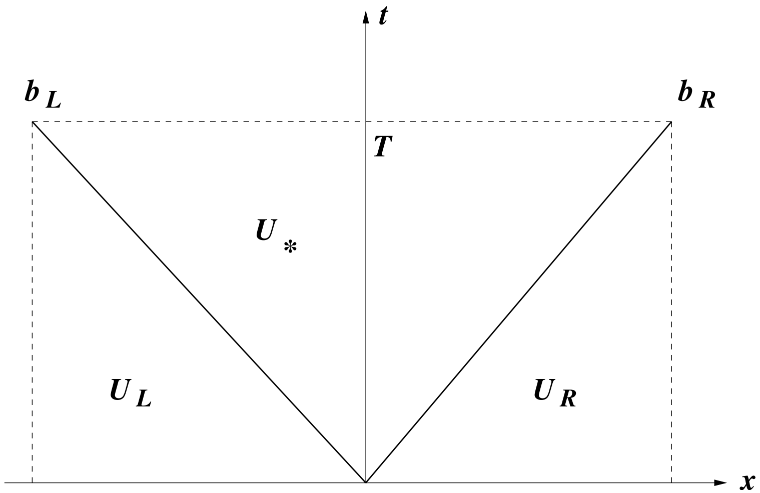
$$\mathbf{f}^{\pm} = \pm\frac{1}{4}\rho a(M \pm 1)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2a\left(\frac{\gamma-1}{2}M \pm 1\right)/\gamma \\ v \\ w \\ 2a^2\left(\frac{\gamma-1}{2}M \pm 1\right)^2/(\gamma^2-1) + \frac{1}{2}(v^2+w^2) \end{bmatrix}$$

Легко проверить, что $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{+} + \mathbf{f}^{-}$. Очевидно также, что $\mathbf{f}^{+} \to 0$ когда $M \to -1$, и $\mathbf{f}^{-} \to 0$ при $M \to 1$.

Как правило, методы расщепления вектора потоков более надежны, но и более диссипативны, чем методы расщепления разности потоков. Так стационарная ударная волна разрешается при расщеплении ван Леера с двумя внутренними точками.

Метод HLL

В статье Хартена, Лакса и ван Леера (Harten, Lax, van Leer — HLL) был предложен очень простой метод приближенного решения задачи о распаде разрыва.



$$\oint \mathbf{u}\, dx - \mathbf{f}\, dt = 0$$

$$\mathbf{u}_* \, (b_R - b_L) T - \mathbf{u}_R \, b_R T + \mathbf{u}_L \, b_L T = \\ = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) \, T - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) \, T$$

$$\mathbf{u}_* = \frac{b_R u_R - b_L u_L - (\mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_L))}{b_R - b_L}$$

$$-(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_L) b_L T = (\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}_*)\, T$$

$$(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_R) b_R T = (\mathbf{f}_* - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R))\, T$$

$$\mathbf{f}_* = \frac{b_R \mathbf{f}_L - b_L \mathbf{f}_R + b_L b_R (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)}{b_R - b_L}$$

Окончательно, поток в методе HLL можно записать как

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{u}_L), & b_L \geq 0 \\ \dfrac{b_R \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - b_L \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) + b_L b_R (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)}{b_R - b_L}, & b_L < 0 < b_R \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_R), & b_R \leq 0 \end{cases}$$

Выбор скоростей в методе HLL(E)

- Наиболее простой выбор, дающий схему, удовлетворяющую энтропийному условию, есть

$$b_L = min(u_L - a_L, u_R - a_R), \quad b_R = max(u_L + a_L, u_R + a_R).$$

- Айнфельдт (Einfeldt) предложил другой выбор, обладающий тем свойством, что с ним получающаяся схема разрешает стационарную ударную волну без внутренних точек:

$$b_L = min(u_L - a_L, \tilde{u} - \tilde{a}), \quad b_R = max(u_R + a_R, \tilde{u} + \tilde{a}),$$

где $\tilde{u}, \tilde{a}$ обозначают величины в состоянии, полученном усреднением по Роу между $\mathbf{u}_L$ и $\mathbf{u}_R$.

- Метод HLLE весьма надежен при расчете течений с сильными ударными волнами и волнами разрежения. Он, в частности, обладает важным свойством сохранения положительности: если плотность и кинетическая энергия были положительны на старом временном слое, то они останутся положительными и на новом. Он, однако, весьма диссипативен и особенно сильно размазывает контактные разрывы. Это естественно, поскольку он пропущен в построенном приближенном решении задачи Римана, Поэтому был предложен ряд способов как восстановить этот пропущенный контактный разрыв (HLLEM, HLLC, HLLR).