Лекция 2.

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Разрывные решения

Рассмотрим задачу Коши для **скалярного закона сохранения**

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad u(0,x) = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0.$$

Два примера: $u_t + au_x = 0, \quad f(u) = au$ — линейное уравнение переноса,
$u_t + uu_x = 0, \quad f(u) = u^2/2$ — невязкое уравнение Бюргерса.

Проинтегрировав от $x = a$ до $x = b$, получаем **интегральную форму**

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

Отсюда следует, что величина

$$\int_a^b u(x,t)\,dx$$

изменяется с течением времени только за счет потоков через границы интервала $[a,b]$. Если эти потоки равны нулю, то она сохраняется. Это объясняет, почему такие уравнения называют законами сохранения.

Продифференцировав f по x, получаем неконсервативную форму

$$u_t + a(u)\, u_x = 0, \quad \text{где } a(u) = f'(u).$$

Как можно построить решение задачи Коши для скалярного закона сохранения? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем со случая, когда величина a постоянна, то есть с уравнения переноса.

Решение линейного уравнения переноса:

$$\boxed{u(x,t) = \phi(x - at).}$$

Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{dx}{dt} = a.$$

Чтобы распространить это на случай нелинейного закона сохранения, введем понятие характеристик.

Характеристики

Характеристики — это кривые в плоскости x, t, определенные уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(u(t, x(t))).$$

Если решение $u(t, x)$ дифференцируемо, то, как легко убедиться, оно постоянно вдоль характеристик.

$$\frac{du(t, x(t))}{dt} = u_t + \frac{dx(t)}{dt}\, u_x = u_t + a(u)\, u_x = 0.$$

Следовательно, в этом случае решение задачи Коши дается неявной формулой

$$\boxed{u = \phi(x - a(u)\, t).}$$

Это легко проверяется прямым вычислением производных и их подстановкой в уравнение.

Именно,

$$u_t = \phi' \cdot (-a - t u_t\, a') \quad \Rightarrow \quad u_t = -\frac{a\phi'}{1+\phi' a' t},$$
$$u_x = \phi' \cdot (1 - t u_x\, a') \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{\phi'}{1+\phi' a' t}$$

Полученная формула, несмотря на неявный вид, вполне пригодна для вычисления решения. Для этого обычно достаточно использовать простой итерационный метод, подставляя в правую часть значение u с предыдущей итерации.

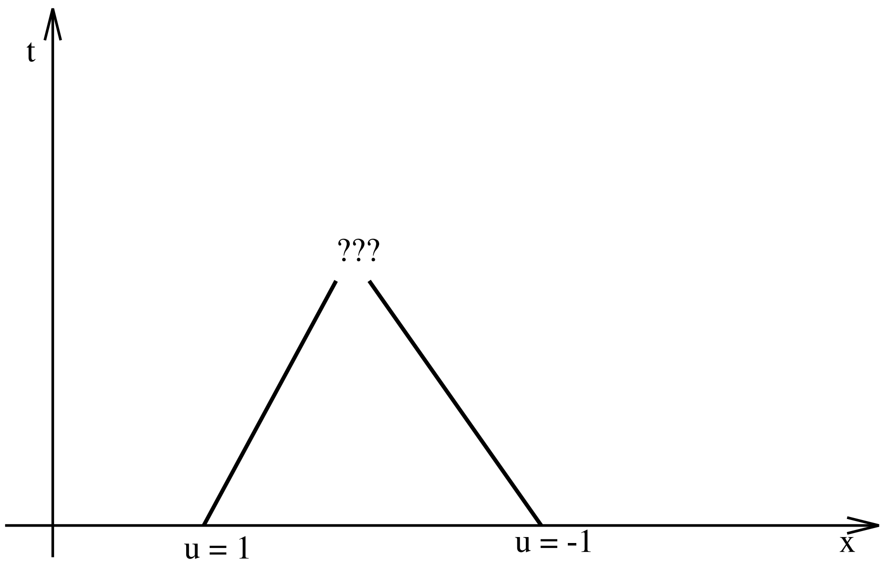
Что, однако, случится, если знаменатель $(1+\phi' a' t)$ обратится в нуль? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с простого примера.

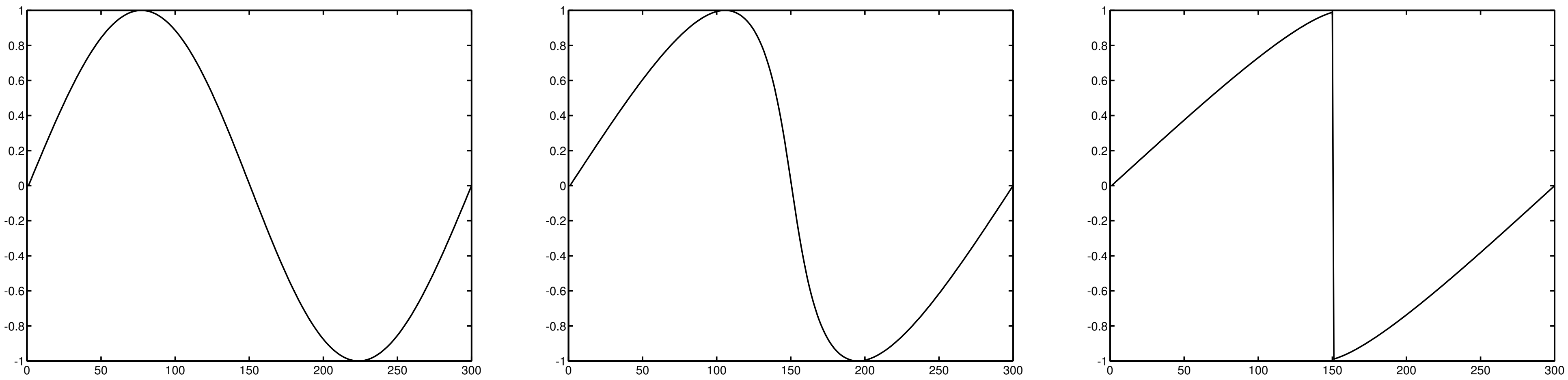
Нарушение гладкости решения

Рассмотрим следующую задачу Коши для невязкого уравнения Бюргерса

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad u(0,x) = sin(x), \qquad -\infty < x < \infty, \ t > 0.$$

В данном случае наклон характеристик $a(u) = u$. В начальный момент времени в точке $x = \pi/2$ $u = 1$, тогда как в точке $x = 3\pi/2$ $u = -1$. Поскольку значение u вдоль характеристик не меняется, то не меняется и их наклон, так что характеристики — прямые линии.





$$t = 0 \qquad t = 0,1 \qquad t = 0,5$$

- Таким образом, даже если начальные данные бесконечно гладкие, в процессе эволюции может наступить такой момент, когда производная решения нелинейного закона сохранения обратиться в некоторой точке в бесконечность (*градиентная катастрофа*).
- Если начальные данные $\phi(x)$ гладкие, и $\phi'(x)$ где-то отрицательно, то в процессе эволюции гладкость нарушается впервые в момент времени

$$T = \frac{-1}{min\, \phi'(x)}$$

Понятие слабого решения

Итак, при решении нелинейных гиперболических уравнений мы не можем избежать рассмотрения разрывных решений. Классическое понятие решения для них не годится. Как можно его обобщить?

Естественный путь определить обобщенное решение, которое может иметь разрывы — это обратиться к интегральной форме закона сохранения. Для этого введем гладкие пробные функции с ограниченным носителем $\eta(x,t) \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, т.е. обращающиеся в нуль для всех достаточно больших x, t: $|x| > X, t > T$.

Умножая закон сохранения на $\eta(x,t)$ и интегрируя над полуплоскостью $t > 0$, получаем

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta(\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x)dxdt = 0.$$

Этот интеграл можно преобразовать с помощью интегрирования по частям, так что все дифференцирования перенесутся на пробные функции. Таким образом приходим к понятию слабого решения.

Определение. *Слабое решение* системы законов сохранения — это вектор-функция $\mathbf{U}(x,t)$, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta_t \mathbf{U} + \eta_x \mathbf{F}(\mathbf{U})\, dxdt + \int_{-\infty}^\infty \eta(0,x)\mathbf{U}_0\, dx = 0,$$

для всех пробных функций $\eta \in C_0^1$. Здесь $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(x,0)$.

Замечание. Осторожно — следуют помнить, что одному и тому же уравнению, записанному в неконсервативной форме, может соответствовать несколько законов сохранения, например

$$(1) \quad u_t + (u^2/2)_x = 0$$

и

$$(2) \quad (u^2/2)_t + (u^3/3)_x = 0$$

для

$$u_t + uu_x = 0.$$

Им будут соответствовать разные слабые решения! Приведенные выше определения вводятся именно для закона сохранения.

Соотношения Рэнкина-Гюгонио

Оказывается, значения решения на двух сторонах разрыва не могут быть полностью произвольными. Они связаны определенными соотношениями.

Рассмотрим разрыв решения, движущийся со скоростью s. Пусть траектория движения разрыва суть $x(t)$, значение u слева о разрыва обозначим u_L, справа от разрыва — u_R. Интегральную форму закона сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = f(u(t,a)) - f(u(t,b))$$

можно переписать как

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{x(t)} u(x,t)\,dx + \int_{x(t)}^b u(x,t)\,dx\right) = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

Выполним дифференцирование по времени, используя для этого формулу дифференцирования интеграла с переменными пределами интегрирования.

$$\int_a^{x(t)} u_t\,dx + u(t,x(t)-\varepsilon)\,x'(t) + \int_{x(t)}^b u_t\,dx - u(t,x(t)+\varepsilon)\,x'(t) = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

Подставив $u_t = -f_x$ и выполняя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} &f(u(t,a)) - f(u(t,x(t)-\varepsilon)) + u(t,x(t)-\varepsilon)\,x'(t) + \\ &f(u(t,x(t)+\varepsilon)) - f(u(t,b)) - u(t,x(t)+\varepsilon)\,x'(t) = \\ &\qquad f(u(t,a)) - f(u(t,b)). \end{aligned}$$

Подставив

$$s = x'(t), \qquad u_L = u(t,x(t)-\varepsilon), \qquad u_R = u(t,x(t)+\varepsilon)$$

окончательно получаем

$$\boxed{s(u_L - u_R) = f(u_L) - f(u_R)}.$$

Это и есть соотношения Рэнкина–Гюгонио.

В частности, для невязкого уравнения Бюргерса

$$u_t + (u^2/2)_x = 0$$

имеем

$$s = \frac{f_L - f_R}{u_L - u_R} = \frac{u_L^2/2 - u_R^2/2}{u_L - u_R} = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

Однако, если бы мы записали его как

$$(u^2/2)_t + (u^3/3)_x = 0,$$

то получили бы

$$s = \frac{u_L^3/3 - u_R^3/3}{u_L^2/2 - u_R^2/2} = \frac{2}{3}\,\frac{u_L^2 + u_L u_R + u_R^2}{u_L + u_R}.$$

Потеря единственности

Введя понятие слабого решения, мы приобрели, однако, некоторые проблемы. В частности, мы потеряли единственность решения задачи Коши.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Два обобщенных решения этой задачи:

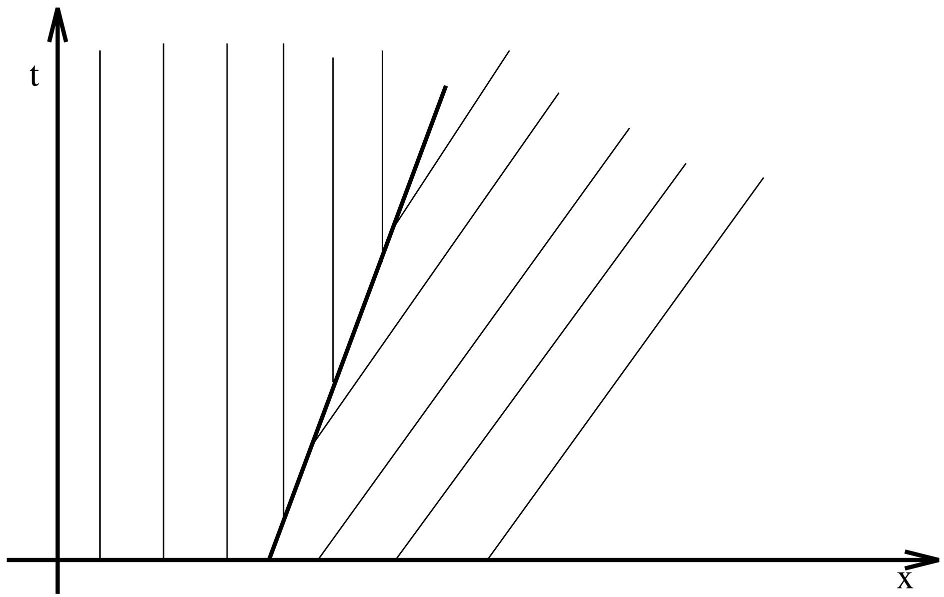
$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0, & x < t/2 \\ 1, & x > t/2 \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/t, & 0 \le x \le t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

Одинаково ли удовлетворительны оба эти решения?

Чтоб ответить на этот вопрос, рассмотрим первое решение подробнее.

Ниже показаны характеристики в плоскости x, t для этого решения.



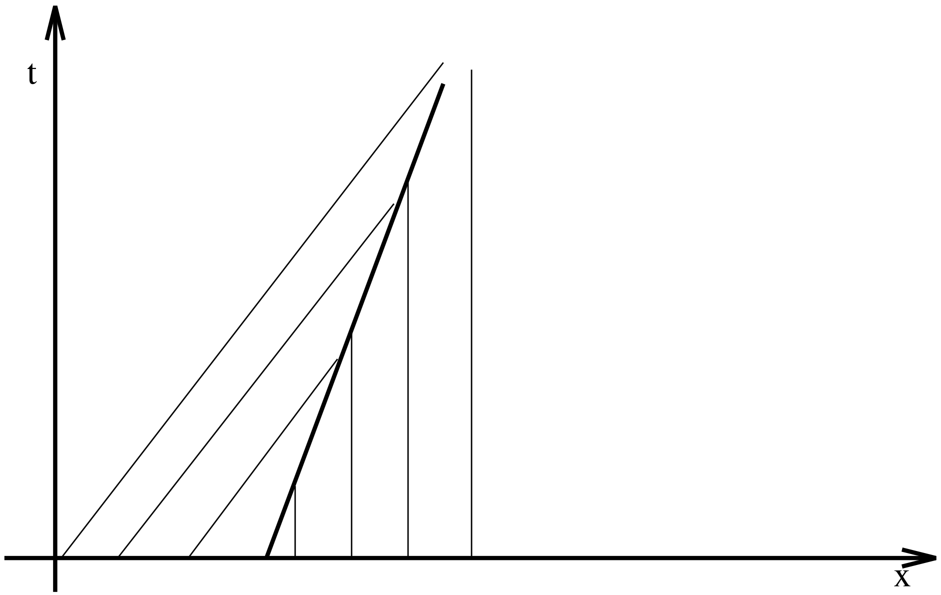
Скачок движется со скоростью $s = 1/2$. Решение u_1 неудовлетворительно: оно неустойчиво к возмущениям и не определяется полностью начальными данными. «Правильным» решением является u_2.

Пример 2. Задача

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

имеет решение

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t/2 \\ 0, & x > t/2 \end{cases}$$



Скачок также движется со скоростью $s = 1/2$. Это решение со сходящимися характеристиками удовлетворяет всем разумным требованиям.

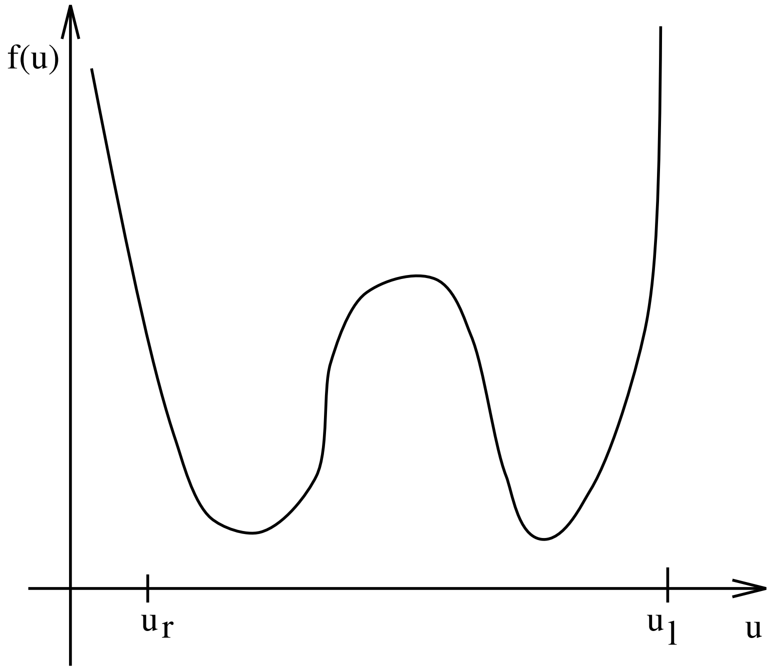
Энтропийное условие

Таким образом, решения в которых характеристики выходят из разрыва неудовлетворительны и должны быть отброшены. Характеристики должны входить в разрыв с обеих сторон. Чтобы исключить неудовлетворительные решения и восстановить единственность, введем так называемое **энтропийное условие**.

Предположим, что функция $f(u)$ выпуклая: $f''(u) > 0$. Тогда разрыв с левым значением u_L и правым u_R будет удовлетворять энтропийному условию, если

$$\boxed{f'(u_L) > s > f'(u_R).}$$

Задача Коши для закона сохранения с выпуклой функцией потока $f(u)$ и произвольными интегрируемыми начальными данными имеет единственное слабое решение в классе функций, удовлетворяющих энтропийному условию на всех скачках.



Если функция $f(u)$ не является выпуклой (см. рисунок), то энтропийное условие формулируется более сложным образом:

$$\frac{f(u_L) - f(u)}{u_L - u} \geq \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \quad \text{для всех} \quad u \in [u_L, u_R] \text{ или } [u_R, u_L]$$

Альтернативный путь введения энтропийного условия связан с рассмотрением уравнения с вязкостью

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}, \qquad \epsilon > 0.$$

Слабое решение невязкого уравнения можно тогда ввести как предел при $\epsilon \to 0$ решений вязкого уравнения (последние всегда гладкие).

Пусть $E(u)$ — некоторая строго выпуклая ($E''(u) > 0$) функция (энтропийная функция). Умножим вязкое уравнение на $E'(u)$:

$$E'(u)\ u_t + E'(u)\ f(u)_x = E'(u)\ \epsilon u_{xx} \quad \Rightarrow$$
$$E(u)_t + F(u)_x = \epsilon E'(u)\ u_{xx}, \quad \text{где } F'(u) = E'(u) f'(u)$$

Далее $\quad E(u)_{xx} = [E'(u)\ u_x]_x = E''(u)\ (u_x)^2 + E'(u)\ u_{xx},$

$$E(u)_t + F(u)_x = \epsilon[E(u)_{xx} - E''(u)\ (u_x)^2] \leq \epsilon E(u)_{xx}$$

При $\epsilon \to 0$, получаем

$$\boxed{E(u)_t + F(u)_x \leq 0}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E dx \leq 0.$$

- Отметим, что энтропийное условие (в обеих формулировках) нарушает симметрию по отношению к обращению времени.
- Действительно, при замене t на $-t$ характеристики, входящие в разрыв превращаются в характеристики, выходящие из него.
- При введении вязкости, симметрии по отношению к обращению времени мешает член, включающий вторую производную по времени. В отличие от двух других он не меняет знак при замене t на $-t$ и x на $-x$.
- Энтропийное условие является одним из проявлений второго начала термодинамики. В данном случае оно обеспечивает положительность всех диссипативных коэффициентов.