Лекция 8.

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА

Задача о распаде разрыва

Рассмотрим следующую задачу с начальными данными:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \qquad \mathbf{U}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases}$$

Такая задача с начальными данными, содержащими один разрыв, слева и справа от которого решение постоянно, называется **задачей о распаде разрыва** или **задачей Римана**.

Если одновременно умножить x и t на некоторую константу, то система уравнений и начальные данные сохранят свой вид. Следовательно, решение задачи Римана должно быть автомодельным: оно зависит не от x и t в отдельности, а только от комбинации x/t:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(x/t).$$

Со времен работы Годунова (1959 г.) решение задачи Римана постоянно используется при построении численных методов решения гиперболических систем уравнений. Поэтому мы рассмотрим его достаточно подробно, начав с линейных систем и обобщив потом на общий нелинейный случай.

Задача Римана для линейных систем. Пример

Начнем с рассмотрения простого примера.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_1(x,0) = 0, \quad u_2(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Собственные значения и векторы матрицы

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

равны

$$\lambda_1 = 1,\ \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1,\ \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Система распадется на два независимых уравнений, если привести матрицу A к диагональной форме.

Введем для этого характеристические переменные

$$\mathbf{U}_t + \mathsf{A}\mathbf{U}_x = 0, \qquad \mathbf{W} = \mathsf{R}^{-1}\mathbf{U},$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\mathsf{R}^{-1}\mathbf{U}_t + \mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R}\mathsf{R}^{-1}\mathsf{U} = 0, \qquad \Lambda = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_t + \Lambda\,\mathbf{W}_x = 0,$$

$$w_{1t} + \lambda_1 w_{1x} = 0,$$

$$w_{2t} + \lambda_2 w_{2x} = 0.$$

Следовательно решение в характеристических переменных имеет вид

$$w_k = w_k^0(x - \lambda_k t), \quad k = 1, 2$$

Начальные данные w_k^0 легко вычисляются из $u_1(x,0)$, $u_2(x,0)$:

$$w_1^0 = w_1(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}, \quad w_2^0 = w_2(x,0) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases},$$

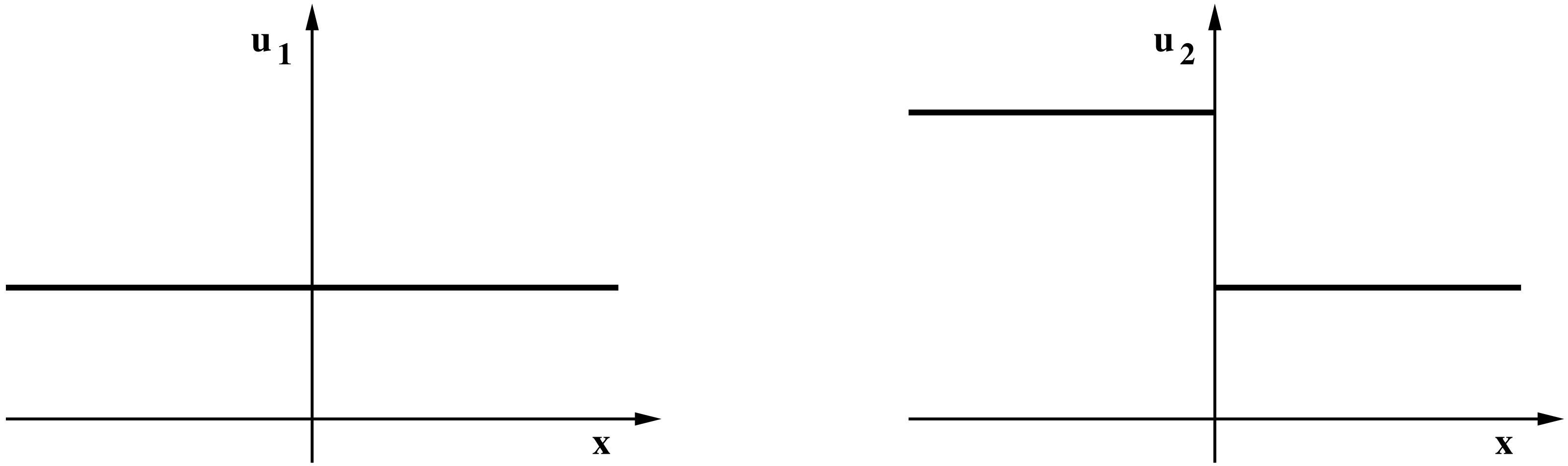
что дает

$$w_1(x,t) = \begin{cases} 1, & x - t < 0 \\ 0, & x - t \geq 0 \end{cases}, \qquad w_2(x,t) = \begin{cases} -1, & x + t < 0 \\ 0, & x + t \geq 0 \end{cases}.$$

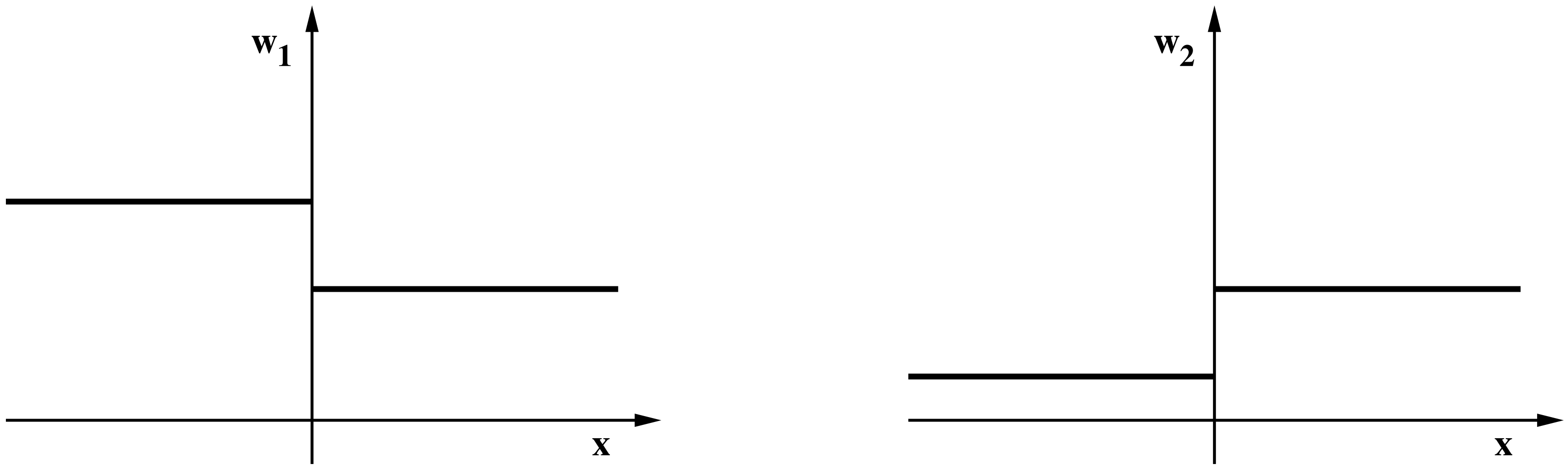
Производя обратное преобразование к примитивным переменным, окончательно получаем

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -t \\ 1, & -t \leq x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}, \qquad u_2(x,t) = \begin{cases} 2, & x < -t \\ 1, & -t \leq x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}.$$

Начальные данные

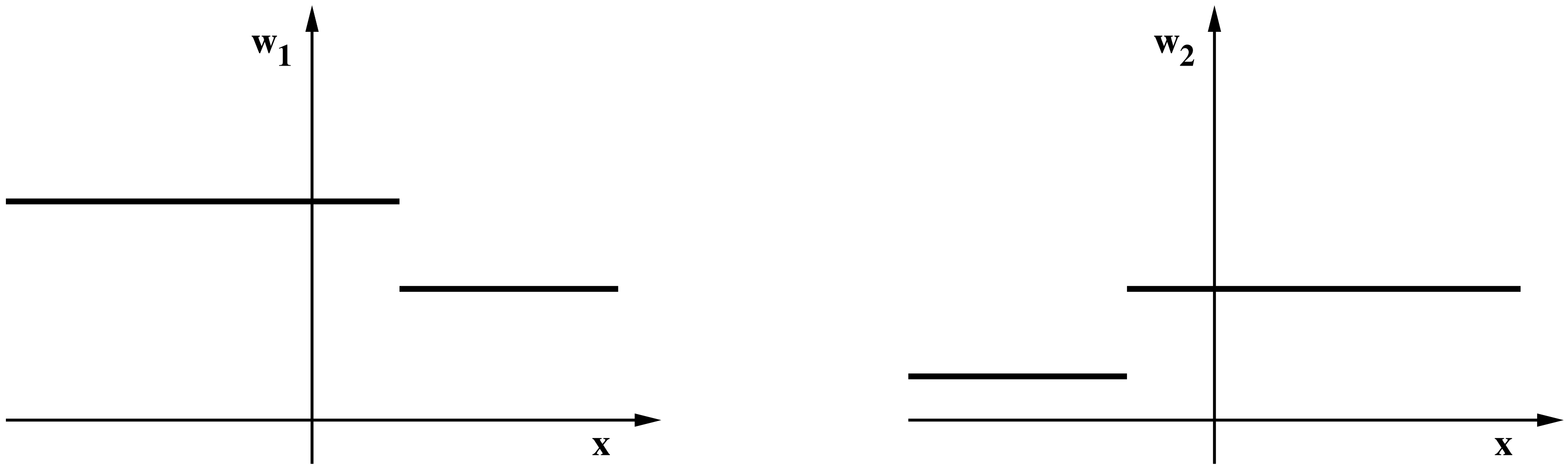


Примитивные переменные

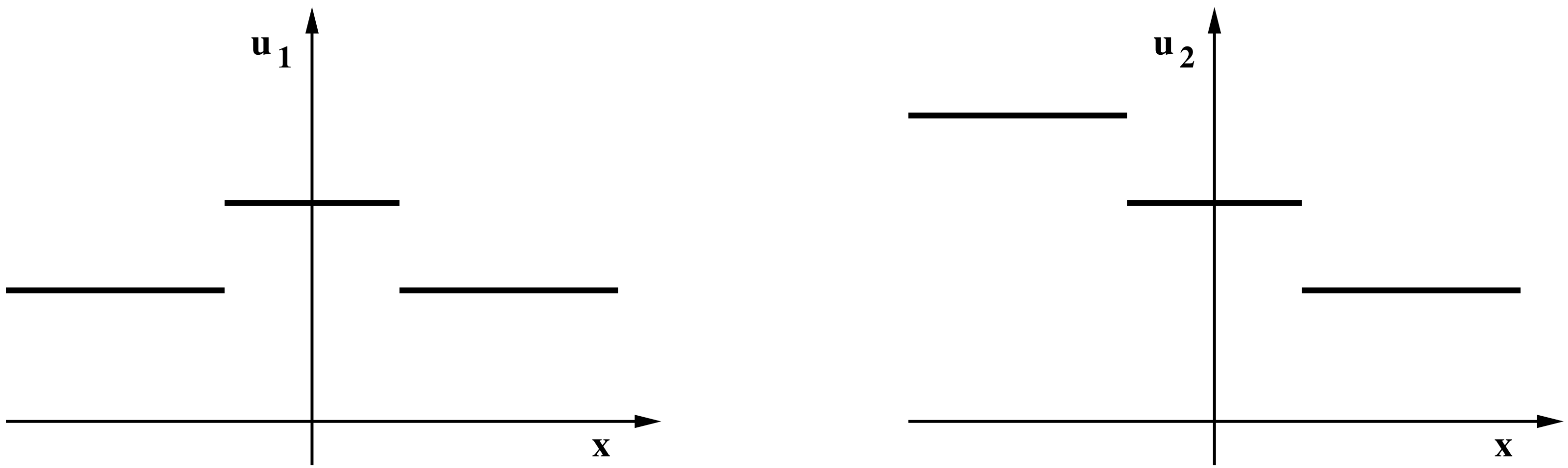


Характеристические переменные

Решение



Характеристические переменные



Примитивные переменные

Задача Римана для линейных систем. Общий случай

$$\mathbf{U}_t + \mathsf{A}\,\mathbf{U}_x = 0, \qquad \mathbf{U}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases}$$

Пусть $\mathsf{A} = \mathsf{R}\Lambda\mathsf{R}^{-1}$. Перейдем к характеристическим переменным $\mathbf{W} = \mathsf{R}^{-1}\mathbf{U}$ и обозначим

$$w_k^0(x) = \begin{cases} w_{kL}, & x < 0 \\ w_{kR} & x > 0 \end{cases}$$

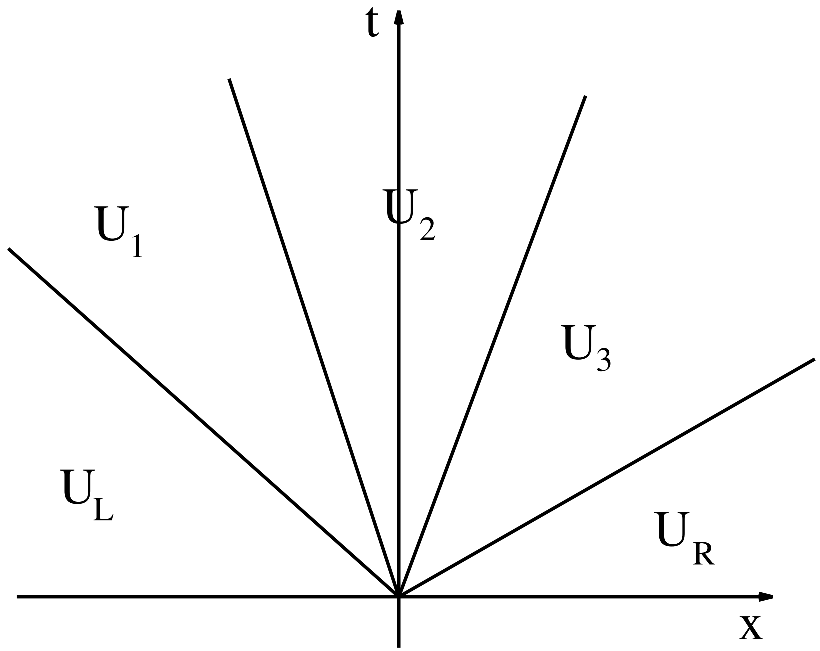
Тогда решение можно записать как

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} w_k^0(x - \lambda_k t)\,\mathbf{r}_k$$

Если $\lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n$, то

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{k=1}^{q} w_{kR}\mathbf{r}_k + \sum_{k=q+1}^{n} w_{kL}\mathbf{r}_k = \mathbf{U}_L + \sum_{k=1}^{q} (w_{kR} - w_{kL})\,\mathbf{r}_k, \qquad \lambda_q < x/t < \lambda_{q+1}.$$

Структура решения иллюстрируется следующим рисунком:



Как видно, оно состоит из разделенных разрывами областей, в которых все искомые величины постоянны. В области с номером q решение равно

$$\mathbf{U}_q = \mathbf{U}_L + \sum_{k=1}^{q} (w_{kR} - w_{kL})\, \mathbf{r}_k$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_L, \quad \mathbf{U}_n = \mathbf{U}_R.$$

Нелинейные системы

Рассмотрим теперь нелинейную систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0},$$

Здесь $\mathbf{u}(x,t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — вектор-функции, имеющие n компонент.

Матрица Якоби

$$\mathsf{A} = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u} = \{\partial f_i/\partial u_j\}.$$

Собственные значения

$$\lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u}) < \dots < \lambda_n(\mathbf{u}).$$

Собственные векторы

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{u}),\ \mathbf{r}_2(\mathbf{u}),\ \dots,\mathbf{r}_n(\mathbf{u}).$$

Истинно линейные и линейно вырожденные семейства характеристик

На примере уравнения Бюргерса мы видели, что в случае одного нелинейного уравнения характеристики могут сходиться. После того, как они пересекутся, образуется ударная волну, и характеристики с обеих сторон входят в нее. Таким же образом они могут вести себя и в случае системы уравнений. Семейство характеристик, соответствующее собственному значению $\lambda_k(\mathbf{u})$, называется **истинно нелинейным**, если выполняется условие

$$\mathbf{r}_k \cdot \nabla_u \lambda_k \equiv \mathbf{r}_k \cdot \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}} \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{u}.$$

Для одного уравнения это сводится к условию выпуклости $f''(u) \neq 0$. Действительно, $\lambda = f'(u)$, $\partial\lambda/\partial u = f''(u)$.

С другой стороны, в случае линейного уравнения, такого как уравнение переноса, все характеристики параллельны друг другу, и разрыв, если он присутствует в начальных данных, в плоскости x, t распространяется вдоль траектории, имеющий такой же наклон, как характеристики. Для системы нелинейных уравнений такое же поведение наблюдается для семейств характеристик, называющихся **линейно вырожденными** и удовлетворяющими следующему условию.

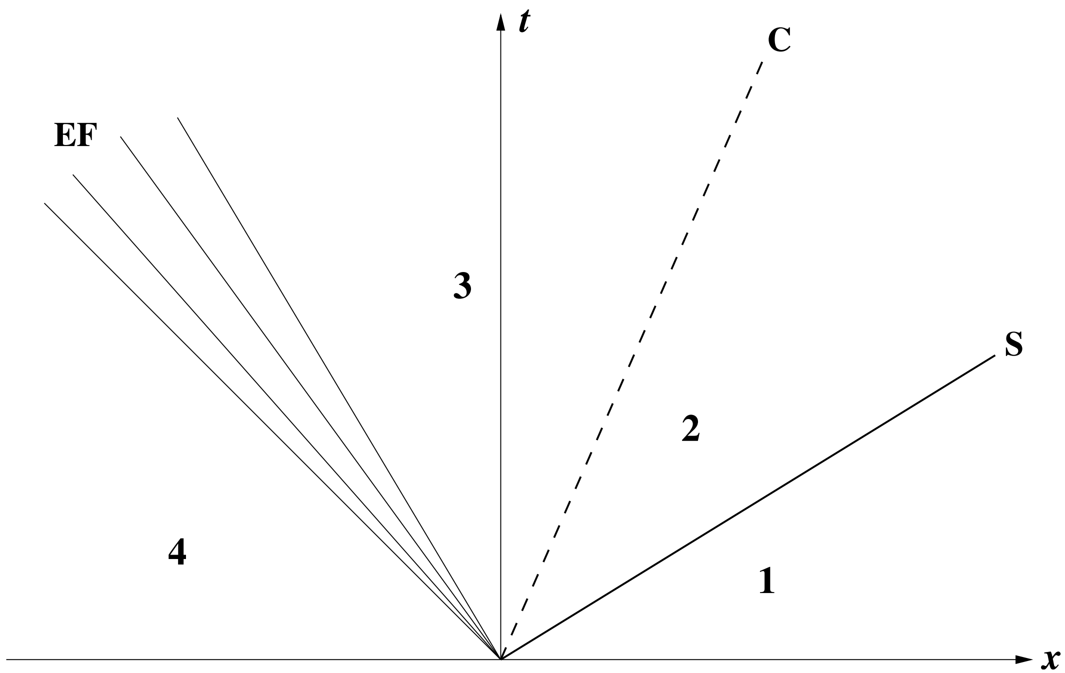
$$\mathbf{r}_k \cdot \nabla_u \lambda_k(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{r}_k \cdot \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{u}.$$

Аналогом этого условия для линейного скалярного уравнения является требование $f''(u) = 0$. Соответствующие разрывы называются **контактными**.

Ударные волны, волны разрежения и контактные разрывы

В случае нелинейной системы уравнений при распаде разрыва могут возникать три вида элементарных решений, отделяющих друг от друга области, в которых все искомые функции постоянны:

1. Ударные волны
2. Волны разрежения
3. Контактные разрывы



Ударные волны

Пусть семейство характеристик, соответствующее собственному значению λ_k, является истинно нелинейным. Разрыв называется ударной волной в k-ом характеристическом поле, если выполняются условия Рэнкина-Гюгонио

$$s(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R),$$

и имеют место равенства

$$\lambda_k(\mathbf{u}_L) > s > \lambda_k(\mathbf{u}_R), \qquad \lambda_{k-1}(\mathbf{u}_L) < s < \lambda_{k+1}(\mathbf{u}_R)$$

Набор состояний $\mathbf{u}_R$, которые могут быть связаны с $\mathbf{u}_L$ через ударную волну в k-ом характеристическом поле образует гладкое однопараметрическое семейство $\quad \mathbf{u}_R = \mathbf{u}(p), -p_0 \le p \le 0, \quad \mathbf{u}_R(0) = \mathbf{u}_L.$

$$s'(p)(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) - s(p)\mathbf{u}_R'(p) = -\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}(\mathbf{u})\ \mathbf{u}_R'(p)$$

$$\mathsf{A}(\mathbf{u}_L)\ \mathbf{u}_R'(0) = s(0)\mathbf{u}_R'(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_R'(0) = c\ \mathbf{r}_k(\mathbf{u}_L),\ s(0) = \lambda_k(\mathbf{u}_L)$$

Волны разрежения

Волны разрежения находятся как автомодельные решения $\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{b}(x/t) = \mathbf{b}(\xi)$.

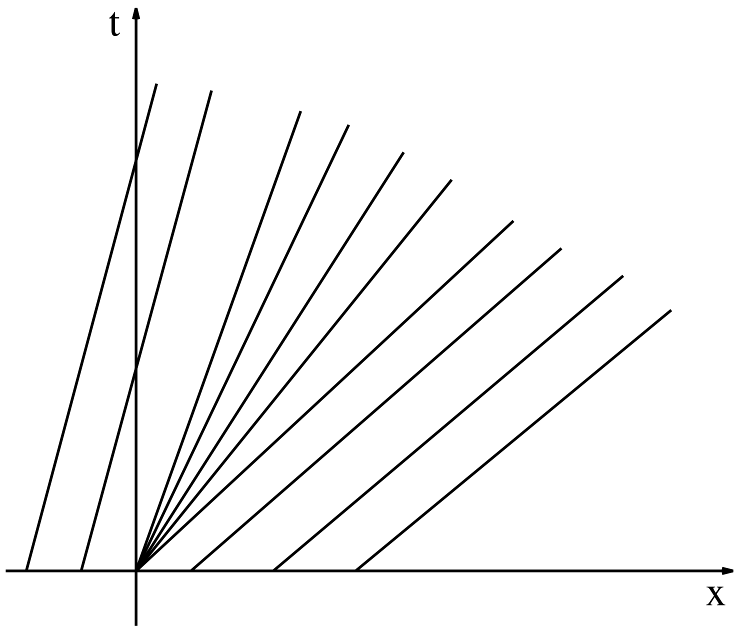
$$-\frac{x}{t^2}\,\mathbf{b}' + \frac{1}{t}\,\mathsf{A}(\mathbf{b})\,\mathbf{b}' = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathsf{A}(\mathbf{b}) - \xi)\;\mathbf{b}' = \mathbf{0}.$$

Отсюда решение выражается через собственные значения и собственные векторы: $\quad \xi = \lambda(\mathbf{b}(\xi)) \quad \mathbf{b}' = c\mathbf{r}(\mathbf{b})$.

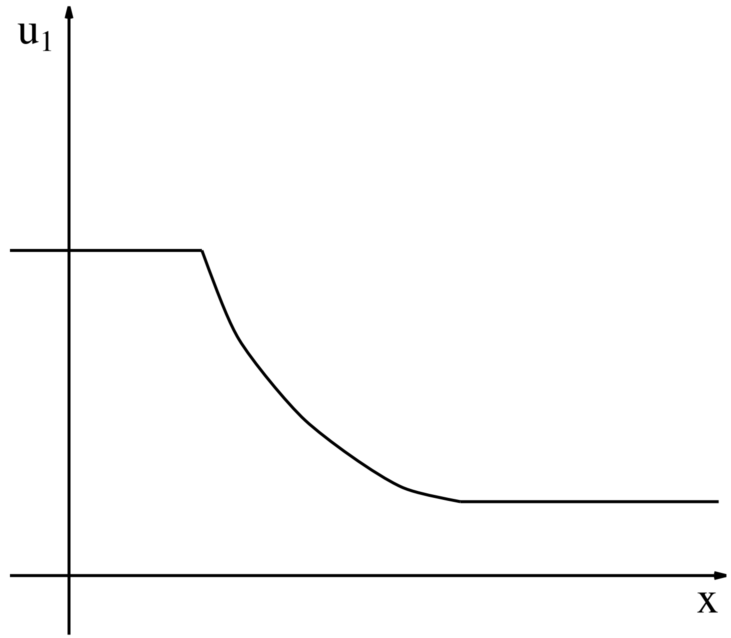
Используя то, что поле истинно нелинейное, можно показать, что $c = 1$. Для заданного состояния $\mathbf{u}_L$ можно решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathbf{b}'(\xi) = \mathbf{r}(\mathbf{b}(\xi)), \qquad \xi_0 \le \xi \le \xi_0 + p, \quad \xi_0 = \lambda\mathbf{b}(\xi_0).$$

Состояние $\mathbf{u}_R = \mathbf{b}(\xi_0 + p)$ связано с $\mathbf{u}_L = \mathbf{b}(\xi_0)$ через волну разрежения в k-ом характеристическом поле.



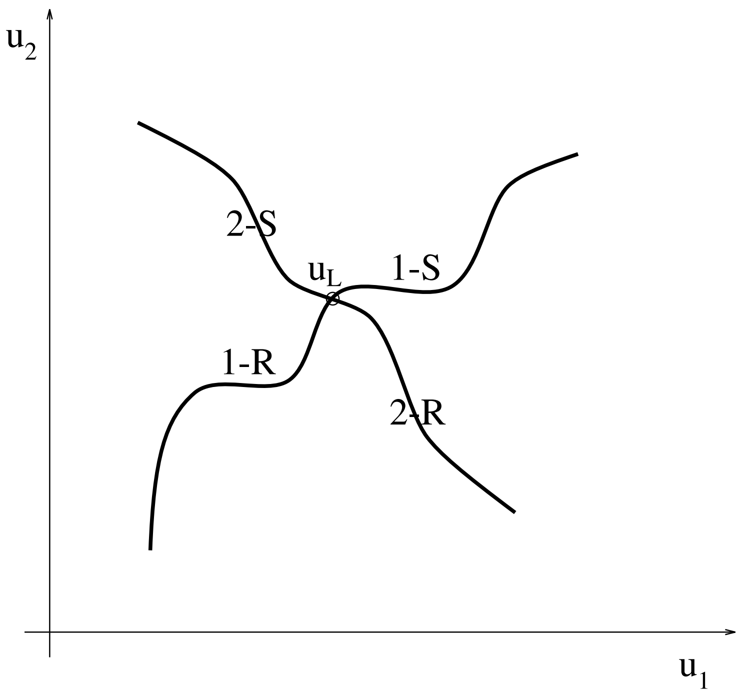
Волна разрежения в плоскости x, t.



Изменение одной из величин.

Истинно нелинейное поле

Итак, если k-ое поле является истинно нелинейным, тогда для заданного состояния $\mathbf{u}_L$ существует однопараметрическое семейство состояний, $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}(p), -p_0 \leq p \leq p_0$ которые могут быть связаны с $\mathbf{u}_L$ посредством ударной волны $p \leq 0$ или волны разрежения $p \geq 0$.



Римановы инварианты

k-инвариант Римана — гладкая скалярная функция $w(u_1, \dots, u_n)$, такая что

$$\mathbf{r}_k \cdot \nabla_u w \equiv \mathbf{r}_k \cdot \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}} = 0.$$

Существует $(n-1)$ k-инвариантов Римана с линейно независимыми градиентами. Действительно, векторное поле

$$\mathbf{r}_k \cdot \nabla_u = \sum_{i=1}^{n} r_k^i \frac{\partial}{\partial u_i}, \qquad \mathbf{r}_k \equiv (r_k^1, \dots, r_k^n)$$

может быть координатным преобразованием $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$ приведено к виду $\dfrac{\partial}{\partial v_1}$, и мы выберем

$$w_1(\mathbf{v}) = v_2, \dots, w_{n-1}(\mathbf{v}) = v_n.$$

Тогда функции $w_i, i = 1, \dots, n-1$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial w_i}{\partial v_1} = 0$$

и имеют линейно независимые градиенты. Обратное преобразование дает функции $w_i(\mathbf{u})$, которые обладают желаемыми свойствами.

k-инварианты Римана постоянны в волне разрежения в k-ом характеристическом поле.

Решение в волне разрежения удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{u}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{u}(\xi)).$$

Пусть w — k-инвариант Римана. Тогда

$$dw/d\xi = 0,$$

и w постоянна в волне разрежения.

Отсюда получаем следующие соотношения для двух состояний, связанных волной разрежения в характеристическом поле:

$$w_i(\mathbf{u}_L) = w_i(\mathbf{u}_R) \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Контактные разрывы

Пусть поле k линейно вырождено. Определим кривую $\mathbf{u}(p)$ так, чтобы

$$\frac{d\mathbf{u}(p)}{dp} = \mathbf{r}_k(\mathbf{u}(p)).$$

Собственное значение постоянно вдоль этой кривой, поскольку из линейной вырожденности следует, что

$$\frac{d\lambda_k(\mathbf{u})}{dp} = \frac{d\mathbf{u}}{dp}\,\nabla_u\lambda_k = 0.$$

Состояния на кривой $\mathbf{u}(p)$ могут быть связаны с $\mathbf{u}_L$ через разрыв, движущийся со скоростью $s = \lambda_k(\mathbf{u}_L) = \lambda_k(\mathbf{u}(p))$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(p)) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(p)) - s\mathbf{u}(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{G}}{dp} = (\mathsf{A}(\mathbf{u}(p)) - s)\,\frac{d\mathbf{u}}{dp} = 0.$$

Отсюда

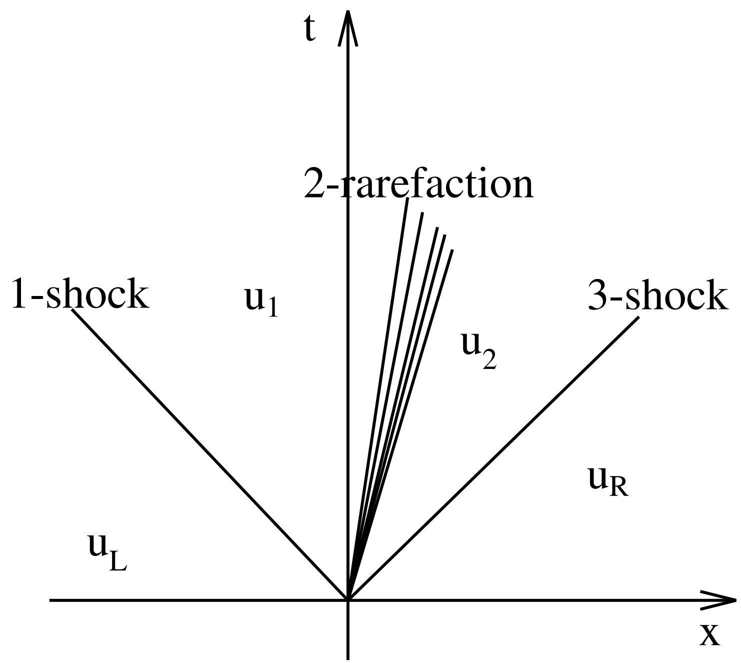
$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(p)) - s\mathbf{u}(p) = \text{const} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - s\mathbf{u}_L,$$

и условия Рэнкина-Гюгонио удовлетворяются.

Такие разрывы называются **контактными разрывами**. Соответствующие характеристики параллельны контактному разрыву. Такие волны во многом подобны решениям линейного уравнения $u_t + au_x = 0$ с разрывом в начальных данных.

Задача Римана для нелинейных гиперболических систем

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \qquad \mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & x < 0 \\ \mathbf{u}_R & x > 0 \end{cases}$$



Задача Римана для нелинейных гиперболических систем