

---

**Лекция 11.**  
**ПОВЫШЕНИЕ ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ. TVD СХЕМЫ**

## Повышение порядка точности

- Кусочно-постоянная реконструкция решения в каждой расчетной ячейке приводит к схеме первого порядка точности. Очевидный способ повышения точности заключается в представлении решения в виде кусочно-линейной, кусочно-параболической и т.п. функции. Для этого нужно знать не только значения самой искомой функции в центре ячейки, но также значения ее первой, второй и т.д. производных:

$$W_j(x) = U_j + U'_j (x - x_j) + \frac{1}{2} U''_j (x - x_j)^2 + \dots$$

- Единственный способ вычислить эти производные — воспользоваться значением искомой функции в соседних точках. Например, для первой производной можно записать:

$$U'_j \approx \begin{cases} (U_{j+1} - U_j) / \Delta x, \\ (U_j - U_{j-1}) / \Delta x, \\ (U_{j+1} - U_{j-1}) / 2\Delta x \end{cases}$$

- Однако, если просто использовать так вычисленные производные для восстановления решения внутри расчетных ячеек и вычисления «левых» и «правых» значений функции на гранях между ячейками, то получающийся результат не вполне удовлетворителен. Как мы уже видели, при использовании схем второго и более высоких порядков возникают численные осцилляции вблизи точек разрыва. Далее излагается как избавиться от осцилляций и гарантировать монотонность решения

## Монотонные схемы и TVD схемы

Изученная нами теорема Лакса-Вендроффа утверждает, что если при измельчении сетки решение, полученное с помощью консервативной схемы сходится к чему-то, то оно сходится к слабому решению закона сохранения. Она ничего не говорит о том, должно ли оно сходиться. Для этой цели бесполезна и теорема Лакса об эквивалентности, так как она применима только к линейным разностным схемам. Для **скалярного** закона сохранения сходимость удастся доказать для определенного класса нелинейно устойчивых (TV-устойчивых) схем.

- Явная,  $(p + q + 1)$ -точечная схема

$$U_j^{n+1} = G(U_{j-q}^n, \dots, U_{j+p}^n)$$

называется *монотонной*, если  $G$  — монотонная возрастающая функция по каждому из  $(p + q + 1)$  аргументов.

- Схема называется *TVD (total variation diminishing) схемой*, если

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n), \quad \text{где } TV(U) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1} - U_j|$$

- Схема называется *сохраняющей монотонность*, если из монотонности  $U^n$  следует монотонность  $U^{n+1}$ .

монотонная $\Rightarrow$ TVD схема $\Rightarrow$ сохраняющая монотонность
---

## Нарушение свойства TVD схемой Лакса-Вендроффа

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad u_j^0 = \begin{cases} 1, & j < 0 \\ 0, & j \geq 0 \end{cases}$$

После одного шага по схеме Лакса-Вендроффа получаем

$$u_j^1 = \begin{cases} 1, & j \leq -1 \\ 1.34, & j = 0 \\ 0.23, & j = 1 \\ 0, & j > 1 \end{cases}$$

$$TV(u^0) = 1, \quad TV(u^1) = 0.34 + 1.11 + 0.23 = 1.68$$

## Монотонные схемы

- **Теорема Годунова.** За исключением тривиального случая, когда оператор  $G$  есть чистый перенос, все монотонные схемы самое большое первого порядка точности.

Ошибка аппроксимации  $\tau_n^j$  схемы

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n)$$

выражается как

$$\tau_n^j = -\Delta t (q(u)u_x)_x + \Delta t O(\Delta t^2 + \Delta x^2),$$

где

$$q(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \sum_{k=-q}^p k^2 G_k(u, \dots, u) - f'(u)^2 \right), \quad u \equiv u(t_n, x_j).$$

Можно показать, что для монотонной схемы  $q(u) \leq 0$  и равенство достигается только в том случае, когда оператор  $G$  есть чистая трансляция.

## Трехточечные TVD схемы

Рассмотрим трехточечные схемы ( $F_{j+1/2} = F(U_j, U_{j+1})$ ). Запишем такую схему в виде

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+1/2} \Delta_+ U_j^n - D_{j-1/2} \Delta_- U_j^n,$$

$$\Delta_+ U_j = U_{j+1} - U_j, \quad \Delta_- U_j = U_j - U_{j-1}.$$

Тогда схема будет TVD схемой при выполнении следующих условий:

$$C_{j+1/2} \geq 0, \quad D_{j-1/2} \geq 0, \quad C_{j+1/2} + D_{j-1/2} \leq 1.$$

Перепишем ту же схему в виде

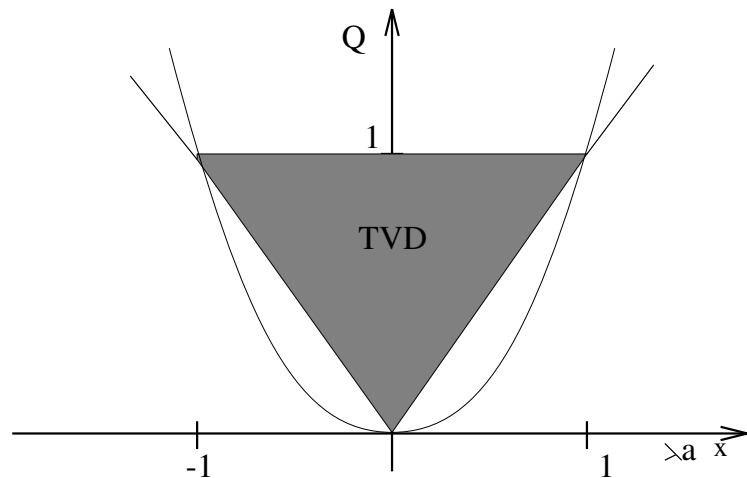
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}),$$

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{2} (f(u_j) + f(u_{j+1})) - \frac{\Delta x}{\Delta t} Q_{j+1/2} (u_{j+1} - u_j).$$



Схема будет TVD тогда и только тогда, когда численный коэффициент вязкости удовлетворяет условию

$$\lambda |a_{j+1/2}| \leq Q_{j+1/2} \leq 1, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad a_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}, & u_j \neq u_{j+1} \\ f'(u_j), & u_j = u_{j+1} \end{cases}$$



Для схемы Лакса-Вендроффа  $Q_{j+1/2} = \lambda^2 a_{j+1/2}^2$ , так что она лежит вне TVD области.

Трехточечные TVD схемы — самое большое первого порядка точности.

## Ограничения точности для TVD схем общего вида

На гладких экстремумах, не являющихся звуковыми точками, TVD схемы первого порядка точности.

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+1/2} \Delta_+ U_j^n - D_{j-1/2} \Delta_- U_j^n,$$

$$C_{j+1/2} = C(U_{j-q+1}^n, \dots, U_{j+p+1}^n), \quad D_{j-1/2} = C(U_{j-q}^n, \dots, U_{j+p}^n).$$

Выписав выражение для ошибки аппроксимации, получаем следующие условия для согласованности и точности второго порядка в точке где  $u_x = 0$ :

$$C - D = -\lambda f'(u), \quad C + D = (\lambda f'(u))^2$$

$$2C = (\lambda f'(u))^2 - \lambda f'(u), \quad 2D = (\lambda f'(u))^2 + \lambda f'(u)$$

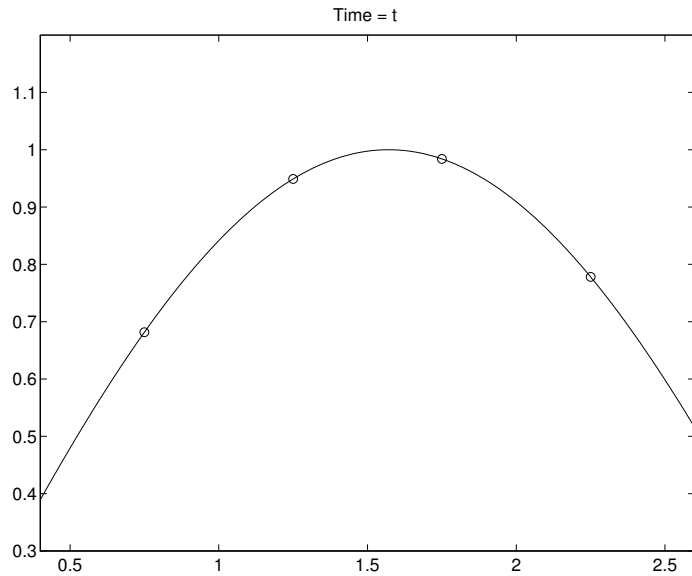
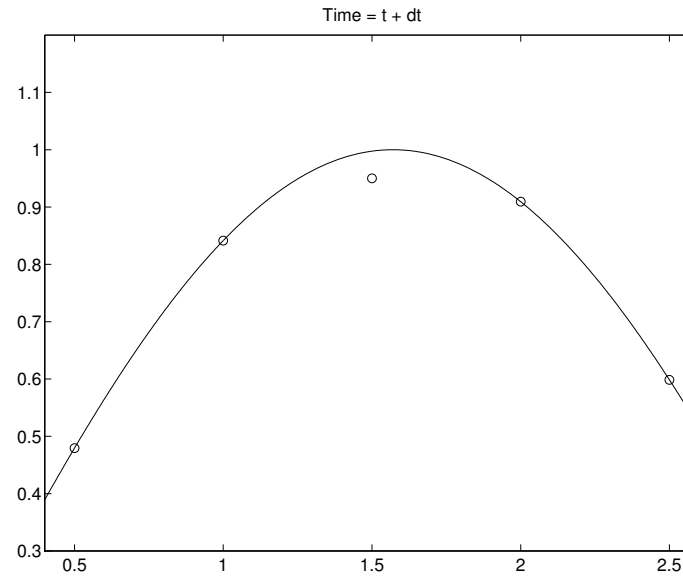
Из условия Куранта  $\lambda f'(u) < 1$  вытекает, что  $C$  и  $D$  не могут быть обе неотрицательными. В то же время это требуется для TVD схемы. Таким образом, если  $f'(u) \neq 0$ , TVD схема будет первого порядка точности на гладком экстремуме.

Если линейная разностная аппроксимация

$$U_j^{n+1} = \sum_{k=-q}^p a_k U_{j+k}^n$$

есть TVD схема, то она первого порядка точности.

## Первый порядок на гладких экстремумах

Время  $t$ Время  $t + dt$

## Условие невозрастания полной вариации

Рассмотрим схему общего вида (не трехточечную), записанную в виде

$$U_j^{m+1} = U_j^m + C_{j+1/2} \Delta_+ U_j^m - D_{j-1/2} \Delta_- U_j^m,$$

$$C_{j+1/2} = C(U_{j-q+1}^m, \dots, U_{j+p+1}^m), \quad D_{j-1/2} = C(U_{j-q}^m, \dots, U_{j+p}^m).$$

Она будет удовлетворять TVD-свойству, если выполнены условия

$$C_{j+1/2} \geq 0, \quad D_{j-1/2} \geq 0, \quad C_{j+1/2} + D_{j-1/2} \leq 1.$$

### Доказательство

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^{m+1} - U_j^{m+1}| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(U_{j+1}^m - U_j^m) + C_{j+3/2} (U_{j+2}^m - U_{j+1}^m) -$$

$$- C_{j+1/2} (U_{j+1}^m - U_j^m) - D_{j+1/2} (U_{j+1}^m - U_j^m) + D_{j-1/2} (U_j^m - U_{j-1}^m)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_{j+3/2} (U_{j+2}^n - U_{j+1}^n) + (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2}) (U_{j+1}^n - U_j^n) + \\
&\quad + D_{j-1/2} (U_j^n - U_{j-1}^n)|, \\
&\quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_{j+3/2} (U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)| + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2}) (U_{j+1}^n - U_j^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} |D_{j-1/2} (U_j^n - U_{j-1}^n)|, \\
&\quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+3/2} |(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)| + \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2}) |(U_{j+1}^n - U_j^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} D_{j-1/2} |(U_j^n - U_{j-1}^n)|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+1/2} |(U_{j+1}^n - U_j^n)| + \\ &+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2}) |(U_{j+1}^n - U_j^n)| + \\ &+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} D_{j+1/2} |(U_{j+1}^n - U_j^n)| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^n - U_j^n| \\ &\Rightarrow TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) \end{aligned}$$

## Замечание о стационарном решении

Если выполнены условия предыдущей теоремы, тогда стационарное решение  $U_j$  будет монотонным, т.е.

$$\min(U_{j-1}, U_{j+1}) \leq U_j \leq \max(U_{j-1}, U_{j+1})$$

*Доказательство*

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+1/2} (U_{j+1}^n - U_j^n) - D_{j-1/2} (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad \Rightarrow$$

$$U_j = \frac{C_{j+1/2} U_{j+1} + D_{j-1/2} U_{j-1}}{C_{j+1/2} + D_{j-1/2}}$$

и искомый результат немедленно следует из положительности коэффициентов.



## Ограничители наклона (*slope limiters*)

$$u_t + f_x = 0,$$

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u), \quad df^+/du \geq 0, \quad df^-/du \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ F^+(U_{j-1/2}^L) - F^+(U_{j+1/2}^L) + F^-(U_{j-1/2}^R) - F^-(U_{j+1/2}^R) \right]$$

Рассмотрим следующую реконструкцию:

$$U_{j+1/2}^L = U_j^n + \frac{1}{2} \psi(R_j^n) (U_j^n - U_{j-1}^n),$$

$$U_{j-1/2}^R = U_j^n - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{R_j^n}\right) (U_{j+1}^n - U_j^n), \quad R_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{U_j^n - U_{j-1}^n}$$

Здесь

$$U_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(\xi, n\Delta t) d\xi,$$

$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, называемая *лимитером (ограничителем)*.

$\psi = 0$  соответствует схеме первого порядка,  $\psi = 1$  — односторонней схеме второго порядка с разностями против потока.

Покажем, что таким образом получается TVD-схема.

*Доказательство.*

$$C_{j+1/2} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{F^-(U_{j+1/2}^R) - F^-(U_{j-1/2}^R)}{U_{j+1/2}^R - U_{j-1/2}^R} \cdot \frac{U_{j+1/2}^R - U_{j-1/2}^R}{U_{j+1}^n - U_j^n},$$

$$D_{j-1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{F^+(U_{j+1/2}^L) - F^+(U_{j-1/2}^L)}{U_{j+1/2}^L - U_{j-1/2}^L} \cdot \frac{U_{j+1/2}^L - U_{j-1/2}^L}{U_j^n - U_{j-1}^n}$$

Чтобы удовлетворить условиям  $C_{j+1/2} \geq 0$ ,  $D_{j-1/2} \geq 0$ , достаточно потребовать

$$\frac{U_{j+1/2}^R - U_{j-1/2}^R}{U_{j+1}^n - U_j^n} \geq 0, \quad \frac{U_{j+1/2}^L - U_{j-1/2}^L}{U_j^n - U_{j-1}^n} \geq 0 \quad (*)$$

## Ограничители наклона (*slope limiters*)

Условие  $C_{j+1/2} + D_{j-1/2} \leq 1$  будет выполнено, если взять  $\Delta t$  достаточно малым.

Подставив в полученные неравенства выражения для  $U_{j\pm 1/2}^{L,R}$ , получим, что достаточно выполнения условия

$$1 + \frac{1}{2} \psi(R) - \frac{1}{2} \psi(S) \cdot \frac{1}{S} \geq 0, \quad \forall R, S \in \mathbb{R}.$$

Равномерная ограниченность левой части (\*) получается, если потребовать

$$\psi(R) - \psi(S) \cdot \frac{1}{S} \leq 2M, \quad \forall R, S \in \mathbb{R}, \quad M \in (0, \infty).$$

Таким образом, требование выполнения TVD свойства приводит к условию, которому должен удовлетворять лимитер:

$$-2 \leq \psi(R) - \psi(S) \cdot \frac{1}{S} \leq 2M, \quad \forall R, S \in \mathbb{R}.$$

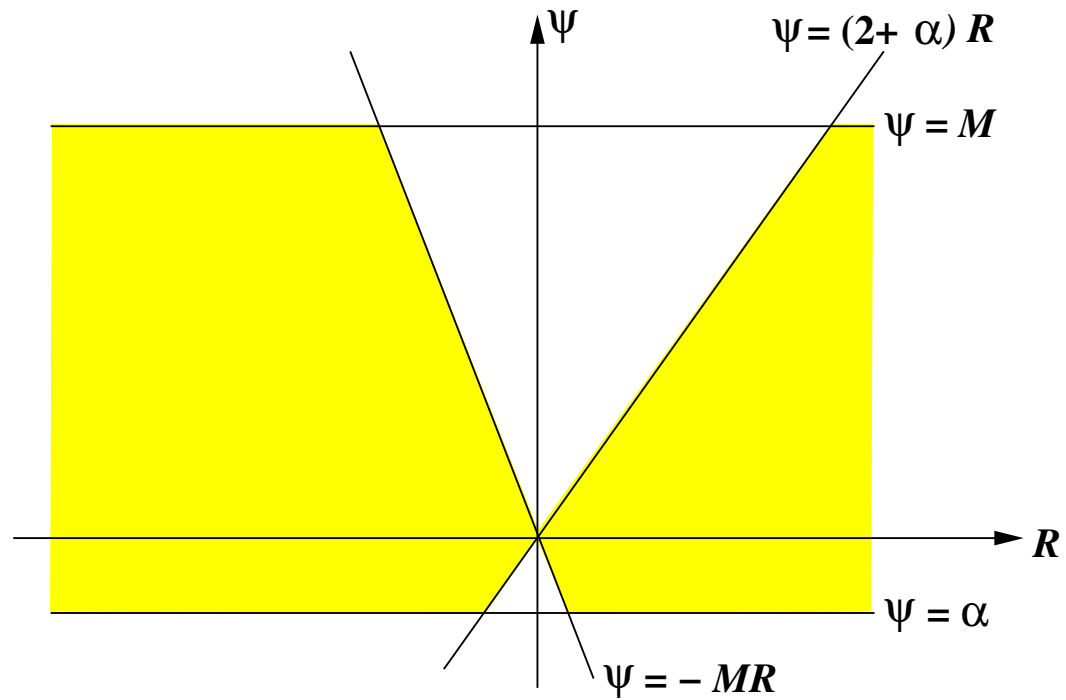
Это неравенство удовлетворяется, если

$$\alpha \leq \psi(R) \leq M, \quad \forall R \in \mathbb{R}$$

и

$$-M \leq \frac{\psi(R)}{R} \leq 2 + \alpha, \quad \forall R \in \mathbb{R} \quad (\alpha \in [-2, 0])$$

## Область TVD



## Второй порядок точности

Очевидно, что если  $\psi \equiv 0$ , то TVD схема — первого порядка. При каких условиях на ограничитель схема будет второго порядка точности? Определим

$$\tilde{U}_{j+1/2}^L = U_j^n + \frac{1}{2} (U_j^n - U_{j-1}^n), \quad U_{j+1/2}^L = U_j^n + \frac{1}{2} \psi(R_j^n) (U_j^n - U_{j-1}^n),$$

$$R_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{U_j^n - U_{j-1}^n}$$

$$\tilde{U}_{j-1/2}^R = U_j^n - \frac{1}{2} (U_{j+1}^n - U_j^n), \quad U_{j-1/2}^R = U_j^n - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{R_j^n}\right) (U_{j+1}^n - U_j^n),$$

$$\frac{1}{R_j^n} = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{U_{j+1}^n - U_j^n}$$

Значения  $\tilde{U}_{j+1/2}^L$ ,  $\tilde{U}_{j-1/2}^R$  соответствуют  $\psi(R) \equiv 1$ , т.е. односторонней противопотоковой схеме 2-го порядка.

- TVD схема будет схемой 2-го порядка, если

$$U_{j+1/2}^L - U_{j-1/2}^L = \tilde{U}_{j+1/2}^L - \tilde{U}_{j-1/2}^L + O(\Delta x^3) \quad \text{и} \quad U_{j+1/2}^L = \tilde{U}_{j+1/2}^L + O(\Delta x^2) \quad (*)$$

- Далее получаем

$$U_{j+1/2}^L = \tilde{U}_{j+1/2}^L + \left(\frac{1}{2} \psi(R_j) - 1\right) (U_j - U_{j-1})$$

Предполагая, что  $\partial u / \partial x$  отграничена от 0, имеем

$$R_j = \frac{U_{j+1} - U_j}{U_j - U_{j-1}} = 1 + \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{U_j - U_{j-1}} = 1 + O(\Delta x)$$

$$\psi(R_j) = \psi(1) + \frac{d\psi}{dR}(1) \cdot (R_j - 1) + O(\Delta x^2)$$

## Второй порядок точности

Получаем, что если  $\psi(1) = 1$ , то второе из условий (\*) выполняются. Далее

$$\begin{aligned} U_{j+1/2}^L &= \tilde{U}_{j+1/2}^L + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dR}(1) \left( \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{U_j - U_{j-1}} \right) \cdot (U_j - U_{j-1}) + O((\Delta x)^3) = \\ &= \tilde{U}_{j+1/2}^L + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dR}(1) (U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}) + O((\Delta x)^3) \end{aligned}$$

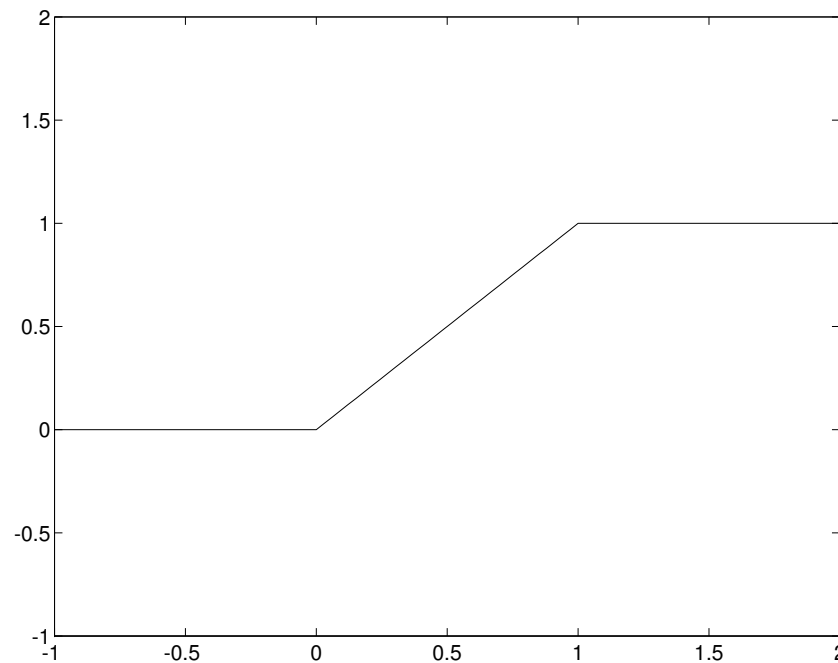
Таким образом и первое условие удовлетворяется.

- Если  $\psi(1) = 1$  и  $\psi \in C^2$ , то TVD схема будет второго порядка точности по пространству.
- Схема будет линейной, если  $\psi(R) = a + bR$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Очевидно, что ни одна линейная схема не может одновременно быть второго порядка точности и удовлетворять TVD свойству.



## Примеры ограничителей. *MinMod*

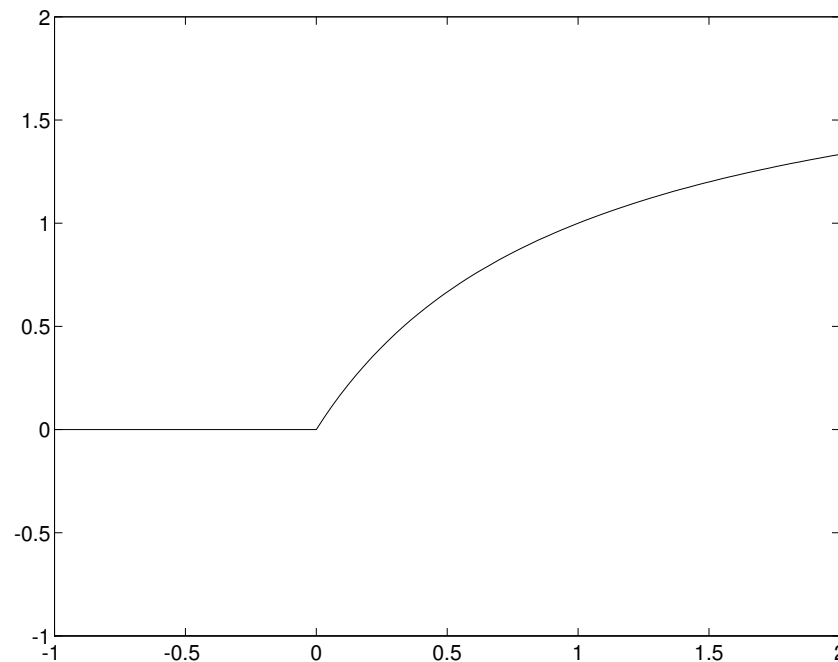
$$\psi_{MM}(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \min(1, R), & R > 0 \end{cases}, \quad \psi_{MM}(1) = 1$$



Ограничитель Minmod

## Примеры ограничителей. Ограничитель ван Леера

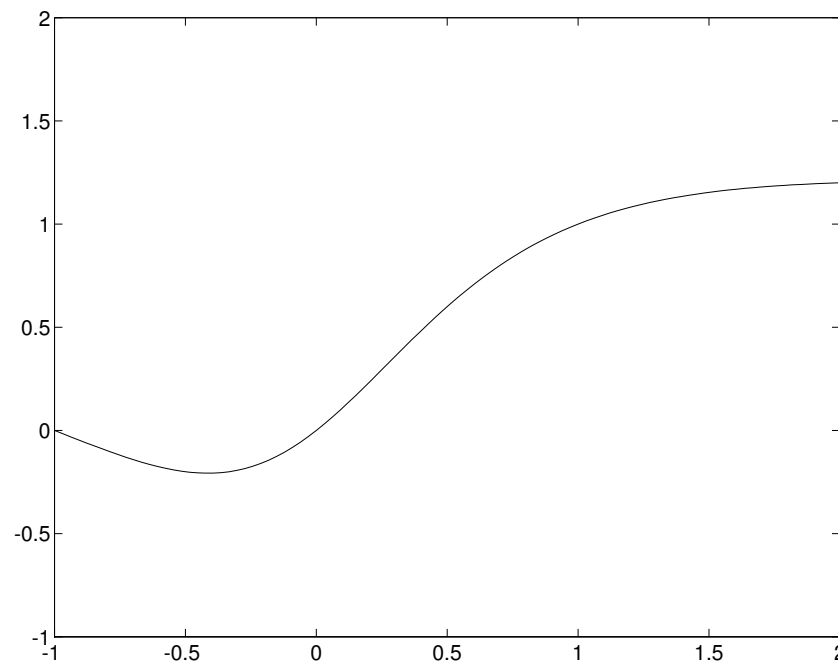
$$\psi_{VL}(R) = \frac{R + |R|}{|R| + 1} = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \frac{2R}{R+1}, & R > 0 \end{cases}, \quad M = 2, \alpha = 0, \quad \psi_{VL}(1) = 1$$



Ограничитель ван Леера

## Примеры ограничителей. Ограничитель ван Альбада

$$\psi_{VA}(R) = \frac{R^2 + R}{R^2 + 1}, \quad M = 2, \quad \alpha = -1/2, \quad \psi_{VA}(1) = 1, \quad \psi_{VA} \in C^\infty$$



Ограничитель ван Альбада

## Примеры ограничителей. *Superbee*

$$\psi_{SB}(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \max(\min(2R, 1), \min(R, 2)), & R > 0 \end{cases}$$

$$\psi_{SB}(1) = 1$$

## Примеры ограничителей. Модифицированный *MinMod*

$$\psi_{MM}^c(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ \min(c, R), & R > 0, \quad 1 \leq c \leq 2 \end{cases}$$

$$\psi_{MM}^c(1) = 1$$

## Связь с линейной реконструкцией

Если решение представлено в каждой ячейке линейной функцией, тогда

$$\begin{aligned}
 U_{j+1/2}^L - U_j &= U_j - U_{j-1/2}^R \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \psi(R_j) (U_j - U_{j-1}) &= \psi\left(\frac{1}{R_j}\right) (U_{j+1} - U_j) \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \psi\left(\frac{1}{R_j}\right) &= \frac{\psi(R_j)}{R_j}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, если ограничитель обладает свойством  $\psi\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\psi(R)}{R}$ ,  $\forall R \in \mathbb{R}$  тогда можно говорить о линейной реконструкции решения в каждой счетной ячейке. Ограничители  $\psi_{MM}$ ,  $\psi_{VL}$ ,  $\psi_{VA}$ ,  $\psi_{SB}$  обладают данным свойством,  $\psi_{MM}^c$  — нет.

В случае линейной реконструкции, TVD свойство эквивалентно

$$\alpha \leq \psi(R) \leq M, \quad -M \leq \psi(R) \leq 2 + \alpha \quad \forall R \in \mathbb{R}$$

Взяв  $M = 2$ , сведем это к одному условию

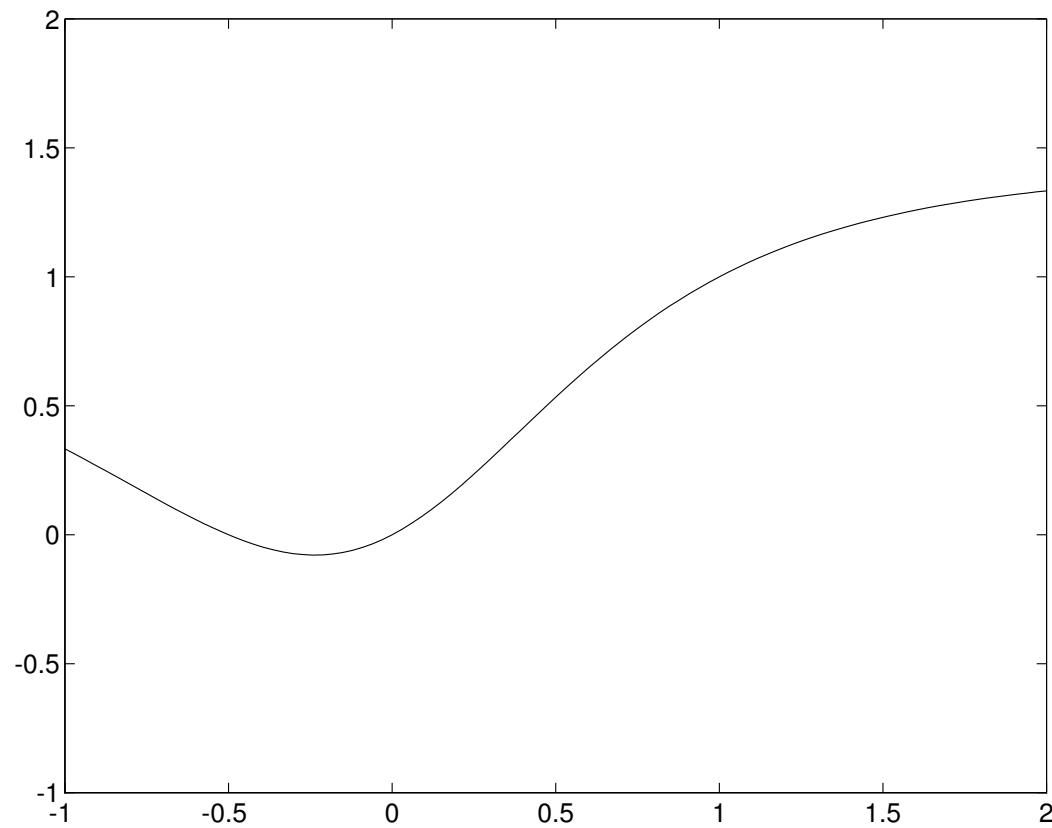
$$\alpha \leq \psi(R) \leq 2 + \alpha \quad \forall R \in \mathbb{R}, \quad (\alpha \in [-2, 0]) \quad \Rightarrow \quad \psi_{max} - \psi_{min} \leq 2$$

## Третий порядок точности

Если ограничитель имеет дополнительное свойство  $\psi'(1) = 2/3$ , то можно показать, что схема будет иметь третий порядок точности в точках, где производная решения не равна нулю. Поскольку  $\psi(R)/R = \psi(1/R)$  влечет  $\psi'(1) = 1/2$ , то  $2/3$ -ограничитель не может быть линейной реконструкцией. Примеры таких ограничителей

$$\psi_{2/3}^1(R) = \frac{4R^2 + 2R}{3(R^2 + 1)}, \quad \psi_{2/3}^2(R) = \frac{2R^2 + R}{2R^2 - R + 2}$$

## Третий порядок точности



2/3-ограничитель



## $\kappa$ -формула ван Леера

В литературе часто встречается так называемая  $\kappa$ -формула ван Леера:

$$U_{j+1/2}^L = U_j + \frac{1}{4} \left[ (1 - \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j-1/2} + (1 + \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2} \right],$$

$$U_{j-1/2}^R = U_j - \frac{1}{4} \left[ (1 - \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2} + (1 + \kappa) \tilde{\tilde{\Delta}}_{j-1/2} \right],$$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_{j+1/2} = \text{Lim}(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}), \quad \tilde{\tilde{\Delta}}_{j-1/2} = \text{Lim}(U_j - U_{j-1}, U_{j+1} - U_j)$$

с утверждением, что она дает третий порядок точности при  $\kappa = 1/3$ . В действительности реконструкция по данной формуле будет третьего порядка, если не применять ограничителей. В противном случае справедливость этого утверждения зависит от свойств используемого ограничителя. Формулу ван Леера можно переписать в стандартном виде, использованном нами, и анализировать также, как это делалось выше.

## Обобщение на многомерный случай

$$u_t + f_x + g_y = 0$$

$$U_{jk}^{n+1} = U_{jk}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ F^+(U_{j-1/2,k}^L) - F^+(U_{j+1/2,k}^L) + F^-(U_{j-1/2,k}^R) - F^-(U_{j+1/2,k}^R) \right] + \\ + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ G^+(U_{j,k-1/2}^L) - G^+(U_{j,k+1/2}^L) + G^-(U_{j,k-1/2}^R) - G^-(U_{j,k+1/2}^R) \right]$$

$$U_{j+1/2,k}^L = U_{j,k}^n + \frac{1}{2} \psi(R_{j,k}^n) (U_{j,k}^n - U_{j-1,k}^n)$$

$$U_{j-1/2,k}^R = U_{j,k}^n - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{R_{j,k}^n}\right) (U_{j+1,k}^n - U_{j,k}^n)$$

$$R_{j,k}^n = \frac{U_{j+1,k}^n - U_{j,k}^n}{U_{j,k}^n - U_{j-1,k}^n}$$

$$U_{j,k+1/2}^L = U_{j,k}^n + \frac{1}{2} \psi(S_{j,k}^n) (U_{j,k}^n - U_{j,k-1}^n),$$

$$U_{j,k-1/2}^R = U_{j,k}^n - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{S_{j,k}^n}\right) (U_{j,k+1}^n - U_{j,k}^n)$$

$$S_{j,k}^n = \frac{U_{j,k+1}^n - U_{j,k}^n}{U_{j,k}^n - U_{j,k-1}^n}$$

$$U_{j,k}^n \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} u(\xi, \eta, n\Delta t) d\xi d\eta$$
$$U_{j+1/2,k}^L, U_{j+1/2,k}^R \approx \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} u(x_{j+1/2}, \eta, n\Delta t) d\eta$$

## Обобщение на систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0, \quad \Lambda(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}) \Lambda(\mathbf{u}) \mathbf{R}(\mathbf{u})$$

Определим локальные характеристические переменные

$$\mathbf{W}_{j-q} = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{U}_{j-q}, \dots, \mathbf{W}_j = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{U}_j, \dots, \mathbf{W}_{j+p} = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{U}_{j+p},$$

$$\mathbf{W}_j = \{W_j^{(\alpha)}\} = (W_j^{(1)}, \dots, W_j^{(n)})^T.$$

Реконструкцию будем делать в локальном характеристическом поле:

$$W_{j+1/2}^{(\alpha)L} = W_j^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \psi(S_j^{(\alpha)}) (W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)})$$

$$W_{j-1/2}^{(\alpha)R} = W_j^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{S_j^{(\alpha)}}\right) (W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)})$$

$$S_j^{(\alpha)} = \frac{W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)}}{W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)}}$$

Обратное преобразование к физическим переменным

$$\mathbf{U}_{j+1/2}^L = \mathbf{R}_j \mathbf{W}_{j+1/2}^L \quad \mathbf{U}_{j-1/2}^R = \mathbf{R}_j \mathbf{W}_{j-1/2}^R$$