

---

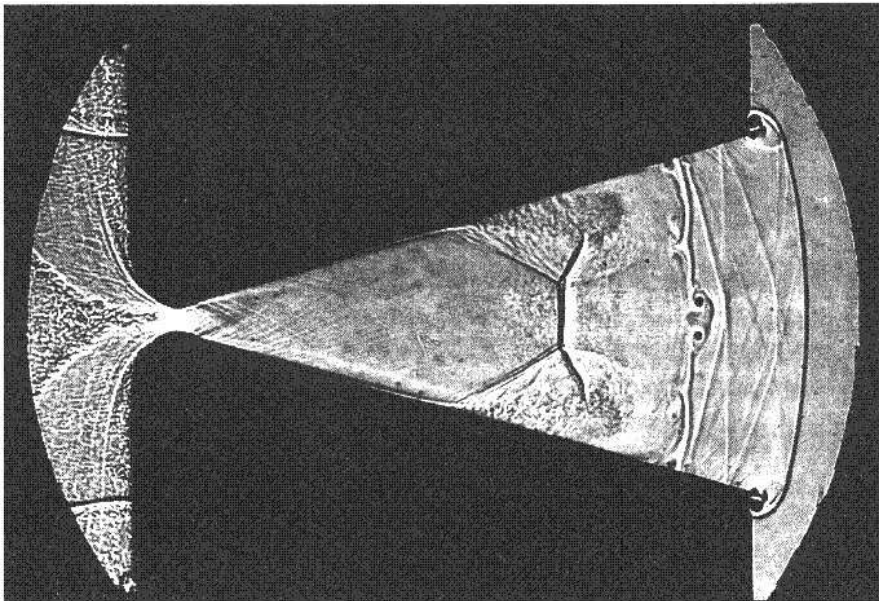
**Лекция 12.**  
**СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. ENO/WENO СХЕМЫ**

## Схемы высокого порядка

- Стандартные TVD схемы, имеющие второй порядок точности (вдали от разрывов и экстремумов решения) хорошо подходят для расчета сверхзвуковых течений с небольшим числом изолированных ударных волн. Однако, задачи, содержащие как ударные волны, так и многочисленные сложные структуры в областях, где решение гладкое, требуют применения более точных вычислительных инструментов. Их необходимость особенно очевидна для таких приложений как
  - прямое численное моделирование (DNS) и моделирование методом крупных вихрей (LES) сжимаемых переходных и турбулентных течений,
  - моделирование отрывных и струйных течений,
  - вычислительная аэроакустика,
  - моделирование сверхзвукового горения и детонации,
  - ...и для многих других!

- Важной целью является развитие алгоритмов и расчетных программ, способных надежно проводить сквозной счет сильных ударных волн и, одновременно, с высокой точностью моделировать гладкую часть сверхзвуковых течений, включающих сложные взаимодействия ударных волн между собой, с пограничными слоями, вихрями, акустическими волнами и волнами гидродинамической неустойчивости. Современные ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted ENO) схемы представляются естественными кандидатами на роль базового вычислительного инструмента в таких алгоритмах и программах.

## Пример: стартовый процесс в плоском сопле



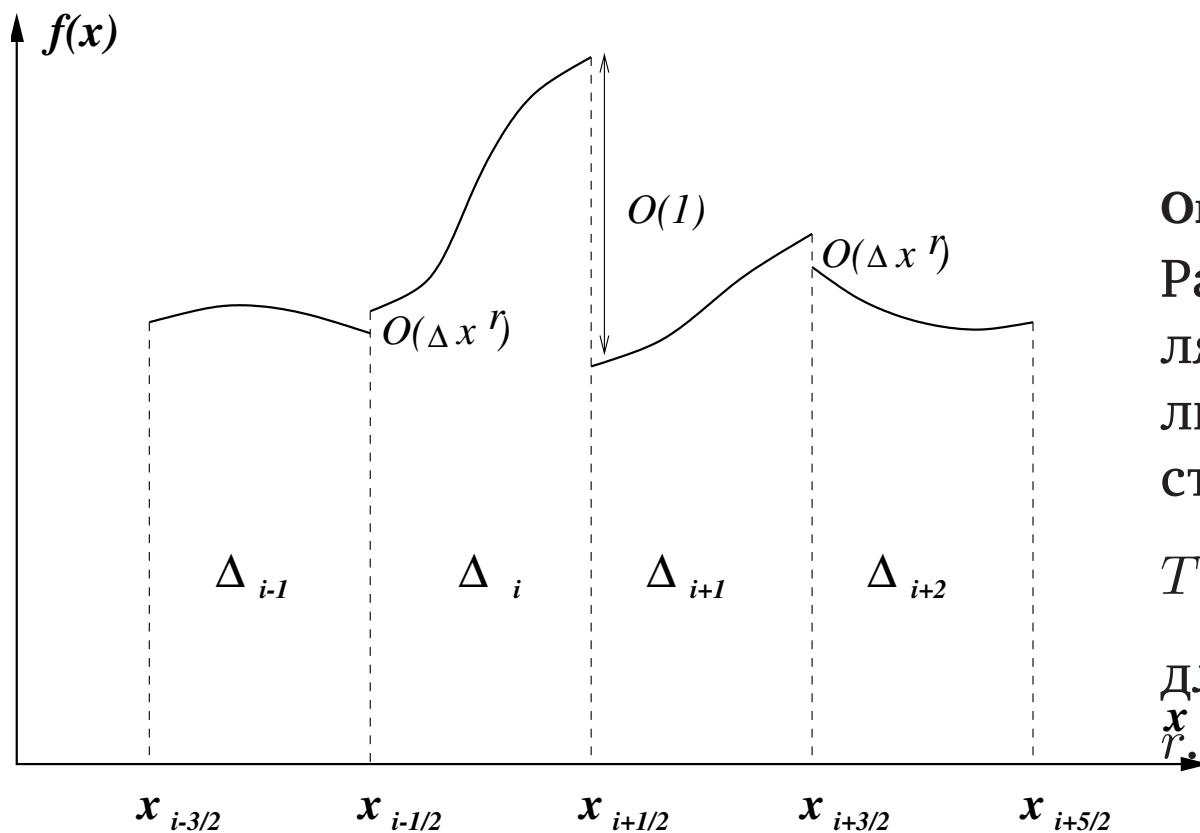
Процесс запуска сопла

Падающая ударная волна, движущаяся с числом Маха скачка, равным 3, только что прошла через плоское сопло. За этой волной имеется несколько контактных поверхностей, содержащих вихри; между этими поверхностями и горлом сопла — вторая ударная волна, направленная против течения, но сносимая вниз по потоку и вызывающая отрыв пограничных слоев.

Идущие от стенок волны Маха указывают на установление сверхзвукового течения вниз по потоку от горла. (Аманн, Н.-О., воспроизведено по «Альбому течений жидкости и газа», составленному М. Ван-Дайком).

## ENO схемы

**Основная идея:** использовать кусочно-полиномиальную реконструкцию и избежать интерполирования через разрывы.



**Определение:**

Разностный метод является ENO схемой, если выполняется свойство

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) + O(\Delta x^r)$$

для всех  $n$  и некоторого

$r$ .

## Сравнение различных ENO и WENO схем

- **Конечнообъемные ENO схемы** (Harten et al., 1987):
  - используют локальный адаптивный шаблон для реконструкции переменных на границах ячеек  $U_{j+1/2}^{L,R}$  из средних по ячейкам  $\bar{U}_j$ ;
  - используют приближенное решение задачи Римана, чтобы вычислить численные потоки  $F_{j+1/2} = F(U_{j+1/2}^L, U_{j+1/2}^R)$ .
- **Конечноразностные ENO схемы** (Shu and Osher, 1988):
  - используют расщепление потоков в центрах ячеек, чтобы выделить их «положительную» и «отрицательную» части;
  - используют локальный адаптивный шаблон для реконструкции численных потоков  $\hat{F}_{j+1/2}$  из «расщепленных» потоков в центрах ячеек.
- **Конечнообъемные WENO схемы** (Liu, Osher and Chan, 1994):
  - используют выпуклую линейную комбинацию шаблонов с адаптивными коэффициентами для реконструкции  $U_{j+1/2}^{L,R}$ ;
  - используют приближенное решение задачи Римана подобно конечнообъемным ENO.

- **Конечноразностные WENO schemes** (Jiang and Shu, 1996):

- используют расщепление потоков подобно конечноразностным ENO;
- используют выпуклую линейную комбинацию шаблонов с адаптивными коэффициентами для реконструкции  $\hat{F}_{i+1/2}$ .

**Если решение достаточно гладкое:**

для конечнообъемных ENO и WENO схем

$$\begin{aligned}\bar{U}_j &= u(x_j) + O(\Delta x^2) \\ U_{j+1/2}^{L,R} &= u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^r) \\ F_{j+1/2} &= f(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^r)\end{aligned}$$

для конечноразностных ENO и WENO схем

$$\begin{aligned}\hat{F}_{j+1/2} &= f(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^2) \\ \frac{\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}}{\Delta x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_j) + O(\Delta x^r)\end{aligned}$$

(где  $r$  — порядок аппроксимации схемы).

## Две задачи полиномиальной реконструкции

- **Задача 1.** Даны средние по ячейкам от функции  $u(x)$ :

$$\bar{U}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(\xi) dx, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Для каждой ячейки  $\Delta_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  найти полином  $p_j(x)$  степени не выше  $k - 1$ , аппроксимирующий  $u(x)$  внутри ячейки с  $k$ -ым порядком точности:

$$p_j(x) = u(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В частности,  $U_{j-1/2}^R \equiv p_j(x_{j-1/2}) = u(x_{j-1/2}) + O(\Delta x^k)$ ,  
 $U_{j+1/2}^L \equiv p_j(x_{j+1/2}) = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k)$ .

- **Задача 2.** Даны значения функции  $u(x)$  в центрах ячеек  $U_j \equiv u(x_j)$ . Найти величины  $\hat{U}_{j+1/2} = \hat{U}(U_{j-r}, \dots, U_{j+s})$ ,  $j = 0, \dots, N$ , разность которых аппроксимирует производную  $u'(x)$  с  $k$ -ым порядком точности:

$$\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{U}_{j+1/2} - \hat{U}_{j-1/2} \right) = u'(x_j) + O(\Delta x^k), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$



## Реконструкция из средних по ячейкам

Пусть  $k$  задано. Выберем шаблон  $S(j) \equiv \{\Delta_{j-r}, \dots, \Delta_{j+s}\}$ , состоящий из ячейки  $\Delta_j$ ,  $r$  ячеек слева и  $s$  ячеек справа. Существует единственный полином  $p(x)$  степени  $k-1 = r+s$ , чьи средние по каждой ячейке шаблона совпадают со средними функции  $u(x)$ :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(\xi) d\xi = \bar{U}_i, \quad i = j-r, \dots, j+s.$$

Этот полином и дает искомую реконструкцию. Что касается значений на гранях ячейки, то они оказываются линейными комбинациями средних по ячейкам, с коэффициентами  $c_{ri}$ ,  $\tilde{c}_{ri}$ , не зависящими от самой функции  $u(x)$ :

$$U_{j+1/2}^R = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} \bar{U}_{j-r+i}, \quad U_{j-1/2}^L = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{c}_{ri} \bar{U}_{j-r+i}.$$

Если мы идентифицируем  $r$  не с ячейкой  $\Delta_j$ , а с точкой  $x_{j+1/2}$ , т.е. используем шаблон  $S(j)$ , чтобы аппроксимировать значение в точке  $x_{j+1/2}$ , тогда можно опустить индексы  $\pm$ . Очевидно в этом случае  $\tilde{c}_{ri} = c_{r-1,i}$ .

Итак,

$$\bar{U}_{j-r}, \dots, \bar{U}_{j-r+k-1}, \quad \Rightarrow \quad U_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} \bar{U}_{j-r+i}, \quad U_{j+1/2} = U(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k).$$

Как практически построить  $p(x)$  и вычислить коэффициенты  $c_{ri}$ ?

## Использование первообразной функции

Определим первообразную  $\mathcal{U}(x) = \int_{-\infty}^x u(\xi) d\xi$ . Очевидно

$$\mathcal{U}(x_{j+1/2}) = \sum_{i=-\infty}^j \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\xi) d\xi = \sum_{i=-\infty}^j \bar{U}_i \Delta x$$

Построим интерполяционный полином Лагранжа  $\mathcal{P}(x)$  степени  $k$  по значениям  $\mathcal{U}(x_{j+1/2})$  в  $k+1$  точке  $x_{j-r-1/2}, \dots, x_{j+s+1/2}$  и положим  $p(x) = \mathcal{P}'(x)$ . Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{P}'(\xi) d\xi = \frac{1}{\Delta x} \left( \mathcal{U}(x_{i+1/2}) - \mathcal{U}(x_{i-1/2}) \right) = \\ \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{-\infty}^{x_{i+1/2}} u(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x_{i-1/2}} u(\xi) d\xi \right) &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\xi) d\xi = \bar{U}_i, \quad i = j-r, \dots, j+s. \end{aligned}$$

Для коэффициентов  $c_{ri}$  вычисления дают

$$c_{ri} = \sum_{m=i+1}^k \frac{\sum_{l=0, l \neq m}^k \prod_{q=0, q \neq m, l}^k (r - q + 1)}{\prod_{l=0, l \neq 0}^k (m - l)}$$

Таблица коэффициентов  $c_{ri}$ 

$k$	$r$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1	-1	1			
	0	1			
2	-1	3/2	-1/2		
	0	1/2	1/2		
	1	-1/2	3/2		
3	-1	11/6	-7/6	1/3	
	0	1/3	5/6	-1/6	
	1	-1/6	5/6	1/3	
	2	1/3	-7/6	11/6	
4	-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4
	0	1/4	13/12	-5/12	1/12
	1	-1/12	7/12	7/12	-1/12
	2	1/12	-5/12	13/12	1/4
	3	-1/4	13/12	-23/12	25/12

Примеры:

 $k = 2$ 

$$r = -1 : U_{j+1/2} = \frac{3}{2} \bar{U}_{j+1} - \frac{1}{2} \bar{U}_{j+2}$$

$$r = 0 : U_{j+1/2} = \frac{1}{2} \bar{U}_j + \frac{1}{2} \bar{U}_{j+1}$$

$$r = 1 : U_{j+1/2} = -\frac{1}{2} \bar{U}_{j-1} + \frac{3}{2} \bar{U}_j + O(\Delta x^2)$$

 $k = 3$ 

$$r = -1 : U_{j+1/2} = \frac{11}{6} \bar{U}_{j+1} - \frac{7}{6} \bar{U}_{j+2} + \frac{1}{3} \bar{U}_{j+3}$$

$$r = 0 : U_{j+1/2} = \frac{1}{3} \bar{U}_j + \frac{5}{6} \bar{U}_{j+1} - \frac{1}{6} \bar{U}_{j+2}$$

$$r = 1 : U_{j+1/2} = -\frac{1}{6} \bar{U}_{j-1} + \frac{5}{6} \bar{U}_j + \frac{1}{3} \bar{U}_{j+1}$$

$$r = 2 : U_{j+1/2} = \frac{1}{3} \bar{U}_{j-2} - \frac{7}{6} \bar{U}_{j-1} + \frac{11}{6} \bar{U}_j + O(\Delta x^3)$$

## Консервативная аппроксимация производной

Если можно найти функцию  $h(x)$ , такую что  $u(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\xi) d\xi$ , тогда очевидно  $u'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[ h\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right]$  и

$$\widehat{U}_{j+1/2} = h(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta x} \left( \widehat{U}_{j+1/2} - \widehat{U}_{j-1/2} \right) = u'(x_j) + O(\Delta x^k).$$

Поскольку  $u(x)$  — ”скользящее среднее” функции  $h(x)$ , то для нахождения  $h(x)$  можно снова использовать реконструкцию через первообразную. Определим  $\mathcal{H}(x) = \int_{-\infty}^x h(\xi) d\xi$ , тогда

$$\mathcal{H}(x_{j+1/2}) = \sum_{i=-\infty}^j \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h(\xi) d\xi = \Delta x \sum_{i=-\infty}^j U_i.$$

Действуя как раньше, находим аппроксимацию  $k$ -ого порядка, которую затем берем в качестве ”численного потока” :

$$\widehat{U}_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} U_{j-r+i}.$$

Например,  $\hat{U}_{j+1/2} = -\frac{1}{6} U_{j-1} + \frac{5}{6} U_j + \frac{1}{3} U_{j+1}$ ,  $\frac{1}{\Delta x} (\hat{U}_{j+1/2} - \hat{U}_{j-1/2}) = u'(x_j) + O(\Delta x^3)$ .

## Адаптивный шаблон

- Как выбрать шаблон так, чтобы избежать реконструкции поперек разрывов?

- Определим разделенные разности

$$i = 0 : \quad \mathcal{U}[x_{j-1/2}] \equiv \mathcal{U}(x_{j-1/2})$$

$$i \geq 1 : \quad \mathcal{U}[x_{j-1/2}, \dots, x_{j-1/2+i}] \equiv \frac{\mathcal{U}[x_{j+1/2}, \dots, x_{j-1/2+i}] - \mathcal{U}[x_{j-1/2}, \dots, x_{j-3/2+i}]}{x_{j-1/2+i} - x_{j-1/2}}$$

Очевидно,  $\mathcal{U}[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] = \frac{\mathcal{U}(x_{j+1/2}) - \mathcal{U}(x_{j-1/2})}{x_{j-1/2+i} - x_{j-1/2}} = \bar{U}_j$ , так что высшие

разделенные разности  $\mathcal{U}$  выражаются через разности  $\bar{U}$ .

- Разделенные разности могут служить мерой гладкости решения, поскольку

$$\mathcal{U}[x_{j-1/2}, \dots, x_{j-1/2+i}] = \mathcal{U}^{(i)}(\xi)/i!$$

для некоторого  $\xi$  внутри шаблона  $x_{j-1/2} < \xi < j - 1/2 + i$ , если функция гладкая, и

$$\mathcal{U}[x_{j-1/2}, \dots, x_{j-1/2+i}] = O(1/\Delta x^i),$$

если внутри шаблона существует разрыв.

## Адаптивный шаблон

Тогда шаблон может быть определен с помощью последовательной процедуры:

1. В ячейке  $\Delta_j$  начинаем с двухточечного шаблона  $\tilde{S}_2(j) = \{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}$  для  $\mathcal{U}$ , который эквивалентен  $S_1(j) = \{x_j\}$  для  $u$ .
2. Для  $l = 2, \dots, k$ , предполагая шаблон  $\tilde{S}_l(j) = \{x_{i+1/2}, \dots, x_{i-1/2+l}\}$  известным, добавляем одну из двух соседних точек,  $x_{i-1/2}$  ИЛИ  $x_{i+1/2+l}$  В СООТВЕТСТВИИ с
  - Если  $|\mathcal{U}[x_{j-1/2}, \dots, x_{j-1/2+l}]| < |\mathcal{U}[x_{j+1/2}, \dots, x_{j+1/2+l}]|$ , то добавить  $x_{i-1/2}$  к шаблону  $\tilde{S}_l(j)$  и получить  $\tilde{S}_{l+1}(j) = \{x_{j-1/2}, \dots, x_{j-1/2+l}\}$ .
  - Иначе добавить  $x_{j+1/2+l}$  к шаблону  $\tilde{S}_l(j)$  и получить  $\tilde{S}_{l+1}(j) = \{x_{j+1/2}, \dots, x_{j+1/2+l}\}$ .
3. Определить, используя таблицу коэффициентов,  $U_{j-1/2}^R, U_{j+1/2}^L$ . Если нужно, можно также построить  $\mathcal{P}_j(x)$  и  $p_j(x)$ .



## Свойства ENO реконструкции

Для ENO реконструкции выполняются свойства

1.  $\mathcal{P}_j(x) = \mathcal{U}(x) + O(\Delta x^{k+1})$ ,  $x \in \Delta_j$  для любой ячейки, не содержащей разрыва. Полная точность вплоть до разрыва.
2.  $\mathcal{P}_j(x)$  монотонна в любой ячейке, содержащей разрыв  $\mathcal{U}(x)$ .
3. Данная реконструкция TVB (total variation bounded). Это означает, что существует функция  $z(x)$ , удовлетворяющая

$$z(x) = \mathcal{P}_j(x) + O(\Delta x^{k+1}), \quad x \in \Delta_i$$

для любой ячейки, включая содержащие разрывы, такая что

$$TV(z) \leq TV(\mathcal{U}).$$

## WENO реконструкция

- **Ключевая идея:** вместо использования только одного из «шаблонных-кандидатов», использовать их выпуклую комбинацию.

$$S_r(j) = \{x_{j-r}, \dots, x_{j-r+k-1}\}, \quad \Rightarrow \quad U_{j+1/2}^{(r)} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} \bar{U}_{j-r+i}, \quad r = 0, \dots, k-1$$

$$U_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r U_{j+1/2}^{(r)}, \quad \omega_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1$$

- Если функция  $u(x)$  гладкая, существуют константы  $\Omega_r$ , такие что

$$U_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \Omega_r U_{j+1/2}^{(r)} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1}).$$

$$\Omega_0 = 1, \quad k = 1;$$

$$\Omega_0 = 2/3, \quad \Omega_1 = 1/3, \quad k = 2;$$

$$\Omega_0 = 3/10, \quad \Omega_1 = 3/5, \quad \Omega_2 = 1/10, \quad k = 3.$$

## WENO реконструкция

- Для гладкого случая желательно иметь

$$\omega_r = \Omega_r + O(\Delta x^{k-1}), \quad \Rightarrow \quad U_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r U_{j+1/2}^{(r)} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1}).$$

- Если какой-то шаблон содержит разрыв, соответствующий весовой коэффициент должен быть близким к нулю.
- Хорошо работают весовые коэффициенты, выбранные как

$$\omega_r = \frac{\sigma_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \sigma_s}, \quad \sigma_r = \frac{\Omega_r}{(\varepsilon + IS^{(r)})^2}, \quad \varepsilon \approx 10^{-6}, \quad r = 0, \dots, k-1.$$

- Для гладкой функции  $IS^{(r)} = O(\Delta x^2)$ ,  $\omega_r = O(1)$ .
- В случае разрыва  $IS^{(r)} = O(1)$ ,  $\omega_r = O(\Delta x^4)$ .

## Индикаторы гладкости

$$IS^{(r)} = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left( \frac{\partial^l p_r(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx$$

$k = 2$ :

$$IS^{(0)} = (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j),$$

$$IS^{(1)} = (\bar{U}_j - \bar{U}_{j-1}).$$

$k = 3$ :

$$IS^{(0)} = \frac{13}{12}(\bar{U}_j - 2\bar{U}_{j+1} + \bar{U}_{j+2})^2 + \frac{1}{4}(3\bar{U}_j - 4\bar{U}_{j+1} + \bar{U}_{j+2})^2,$$

$$IS^{(1)} = \frac{13}{12}(\bar{U}_{j-1} - 2\bar{U}_j + \bar{U}_{j+1})^2 + \frac{1}{4}(\bar{U}_{j-1} - \bar{U}_{j+1})^2,$$

$$IS^{(0)} = \frac{13}{12}(\bar{U}_{j-2} - 2\bar{U}_{j-1} + \bar{U}_j)^2 + \frac{1}{4}(\bar{U}_{j-2} - 4\bar{U}_{j-1} + 3\bar{U}_j)^2.$$

## Конечнообъемные схемы

1. Используя ENO или WENO реконструкцию получить из  $\bar{U}_j$  величины  $U_{j+1/2}^L$  и  $U_{j+1/2}^R$ ;
2. Вычислить потоки  $F_{j+1/2}$ , решая (приближенно) задачу о распаде разрыва на гранях между ячейками;
3. Проинтегрировать по времени уравнение

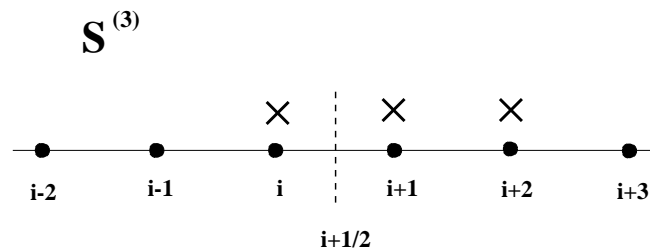
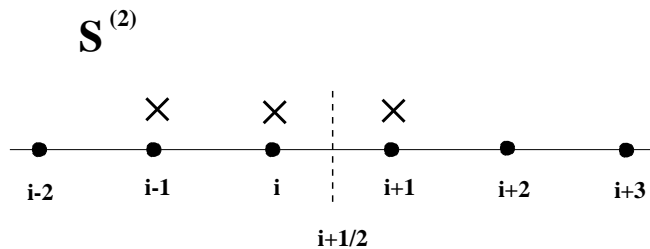
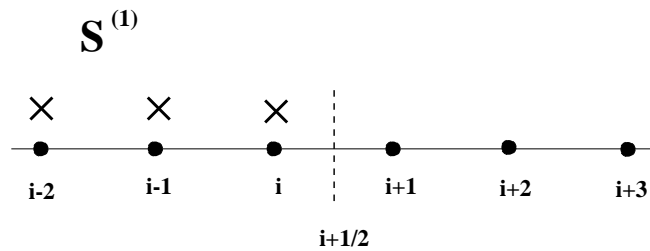
$$\frac{d\bar{U}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}).$$

## Конечноразностные схемы

1. Расщепить поток на положительную и отрицательную части:  $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$ ,  $\partial f^+ / \partial u \geq 0$ ,  $\partial f^- / \partial u \leq 0$ ;
2. Положить  $\bar{V}_j = f^+(u_j)$  и используя ENO или WENO реконструкцию получить величины  $\hat{F}_{j+1/2}^+ = U_{j+1/2}^L$ ;
3. Положить  $\bar{V}_j = f^-(u_j)$  и используя ENO или WENO реконструкцию получить величины  $\hat{F}_{j+1/2}^- = U_{j+1/2}^R$ ;
4. Образовать полный поток  $\hat{F}_{j+1/2} = \hat{F}_{j+1/2}^+ + \hat{F}_{j+1/2}^-$ ;
5. Проинтегрировать по времени уравнение

$$\frac{dU_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}).$$

## Конечноразностная WENO схема 5-го порядка



Скалярный закон сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \lambda = \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}}{\Delta x}$$

ENO:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \begin{cases} f_{i+1/2}^{(1)} = \frac{11}{6}f_i - \frac{7}{6}f_{i-1} + \frac{2}{6}f_{i-2} & \text{ИЛИ} \\ f_{i+1/2}^{(2)} = \frac{2}{6}f_{i+1} + \frac{5}{6}f_i - \frac{1}{6}f_{i-1} & \text{ИЛИ} \\ f_{i+1/2}^{(3)} = -\frac{1}{6}f_{i+2} + \frac{5}{6}f_{i+1} + \frac{2}{6}f_i \end{cases}$$

WENO:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{\nu=1}^3 \omega^{(\nu)} f_{i+1/2}^{(\nu)}$$

## Конечноразностная WENO схема 5-го порядка

$$\omega^{(\nu)} = \frac{\sigma^{(\nu)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}}, \quad \sigma^{(\nu)} = \frac{\Omega^{(\nu)}}{[\varepsilon + IS^{(\nu)}]^p}, \quad p = 2, \quad \varepsilon \sim 10^{-6}$$

Оптимальные коэффициенты:

$$\Omega^{(1)} = 1/10$$

$$\Omega^{(2)} = 6/10$$

$$\Omega^{(3)} = 3/10$$

Индикатор гладкости:

$$IS^{(\nu)} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[ \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)^2 + \Delta x^3 \left( \frac{d^2f}{dx^2} \right)^2 \right] dx$$

С оптимальными коэффициентами WENO схема эквивалентна несимметричной схеме 5-го порядка:

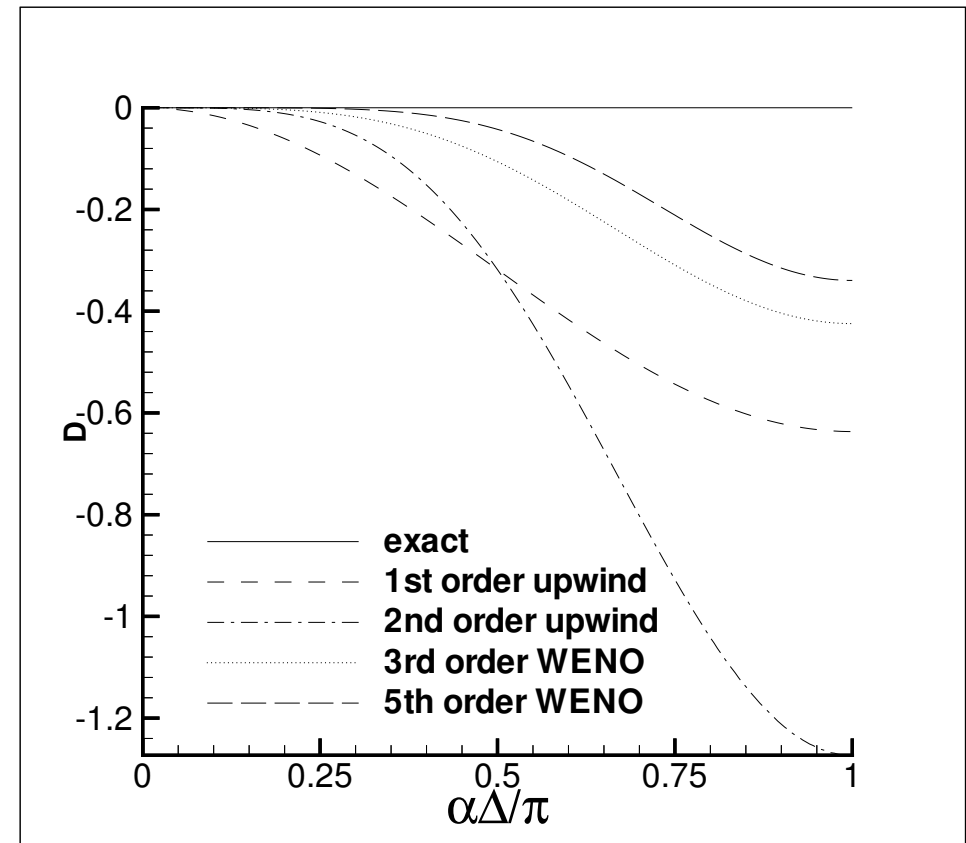
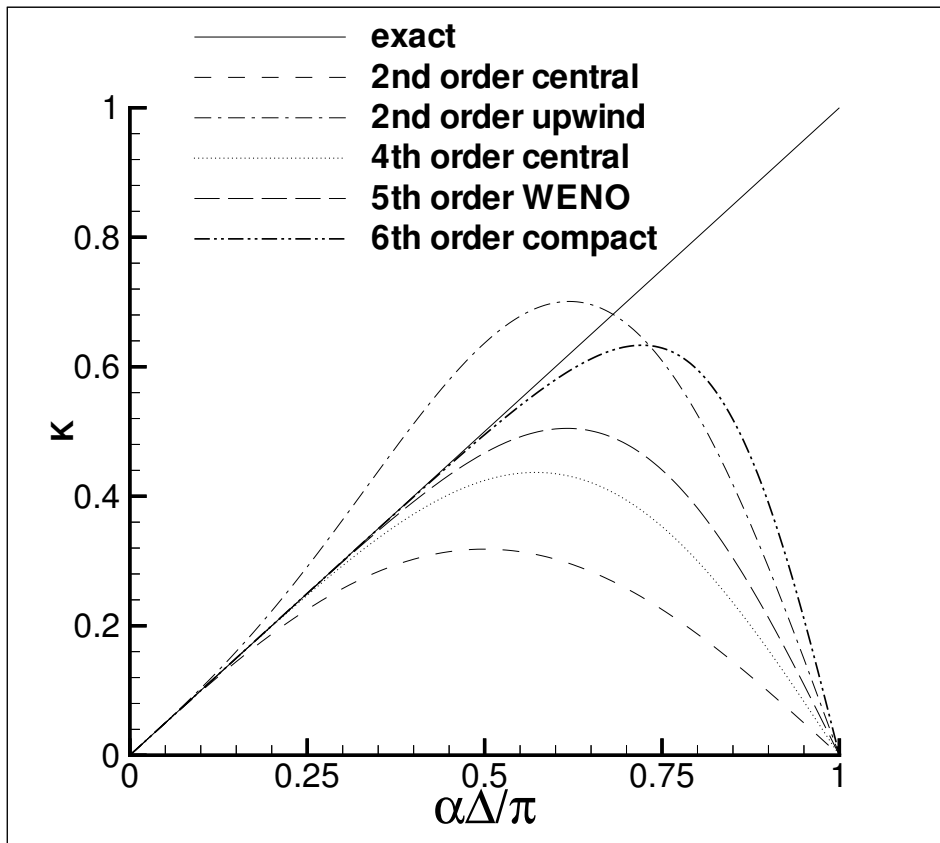
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3f_{i+2} + 30f_{i+1} + 20f_i - 60f_{i-1} + 15f_{i-2} - 2f_{i-3}}{60\Delta x}$$

При  $\lambda = \partial f / \partial u \leq 0$  используются симметрично отраженные формулы.



## Дисперсионные и диссипативные свойства

Точное дифференцирование:  $\frac{d}{dx}e^{i\alpha x} = i\alpha e^{i\alpha x}$ , разностная аппроксимация  
 $= i\alpha'(\alpha, \Delta) e^{i\alpha x}$ ,  $\alpha' = k + iD$ ,  $\Delta$  – шаг сетки.



## Системы законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}) \Lambda(\mathbf{u}) \mathbf{R}(\mathbf{u})$$

- Найдем среднее состояние  $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1/2}$  (обычно с помощью усреднения по Роу)
- Определим локальные характеристические переменные

$$\overline{\mathbf{W}}_{j-r} = \tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2}^{-1} \overline{\mathbf{U}}_{j-r}, \quad \dots, \quad \overline{\mathbf{W}}_{j+s} = \tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2}^{-1} \overline{\mathbf{U}}_{j+s}.$$

- Реконструкцию делаем в локальном характеристическом поле:

$$\overline{\mathbf{W}}_j \rightarrow \mathbf{W}_{j+1/2}^{L,R}$$

- Обратное преобразование к физическим переменным

$$\mathbf{U}_{j+1/2}^{L,R} = \tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2} \mathbf{W}_{j+1/2}^L$$

- В случае конечноразностных (W)ENO схем реконструкция применяется к локальным характеристическим потокам:

$$\Phi_{j-r} = \tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2}^{-1} \mathbf{f}_{j-r}, \quad \dots, \quad \Phi_{j+s} = \tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2}^{-1} \mathbf{f}_{j+s}.$$

## Способы расщепления потока

$$\Phi = \{\Phi^\alpha\}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad \tilde{\Lambda} = \text{diag}\{\tilde{\lambda}_{i+1/2}^\alpha\}, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

- Расщепление Роу

$$\Phi_i^{\alpha+} = \begin{cases} \Phi_i^\alpha, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^\alpha \geq 0 \\ 0, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^\alpha < 0 \end{cases} \quad \Phi_i^{\alpha-} = \begin{cases} \Phi_i^\alpha, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^\alpha < 0 \\ 0, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^\alpha \geq 0 \end{cases}$$

- Локальное расщепление Лакса–Фридрихса

$$\Phi_i^{\alpha+} = (\Phi_i^\alpha + \beta W_i^\alpha)/2, \quad \Phi_i^{\alpha-} = (\Phi_i^\alpha - \beta W_i^\alpha)/2, \quad \beta = \max(|\lambda_j^\alpha|, |\lambda_{j+1}^\alpha|)$$

- Глобальное расщепление Лакса–Фридрихса

$$\Phi_i^{\alpha+} = (\Phi_i^\alpha + \beta W_i^\alpha)/2, \quad \Phi_i^{\alpha-} = (\Phi_i^\alpha - \beta W_i^\alpha)/2, \quad \beta = \max_{1 \leq m \leq N} (|\lambda_m^\alpha|)$$

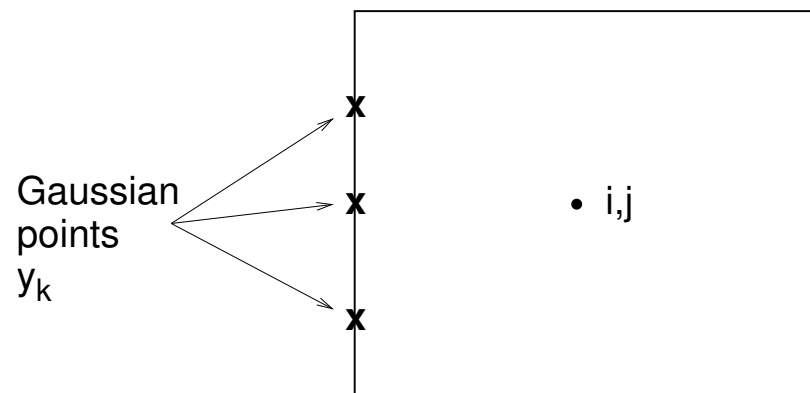
## От одномерных задач к многомерным

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0$$

- Конечнообъемные схемы:

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}_{i,j}}{\partial t} + (\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}) + (\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}) = 0$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, y) dx dy$$



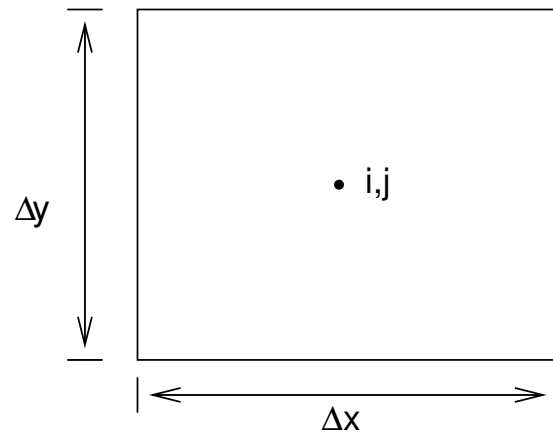
$$\mathbf{F}_{i-1/2,j} = \sum_k C_k \mathbf{F}(x_{i-1/2}, y_k)$$

## От одномерных задач к многомерным

- Конечноразностные схемы:

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2,j}}{\Delta x}} + \frac{\hat{\mathbf{G}}_{i,j+1/2} - \hat{\mathbf{G}}_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0$$

$$= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \Big|_{i,j} + O(\Delta x^k)$$



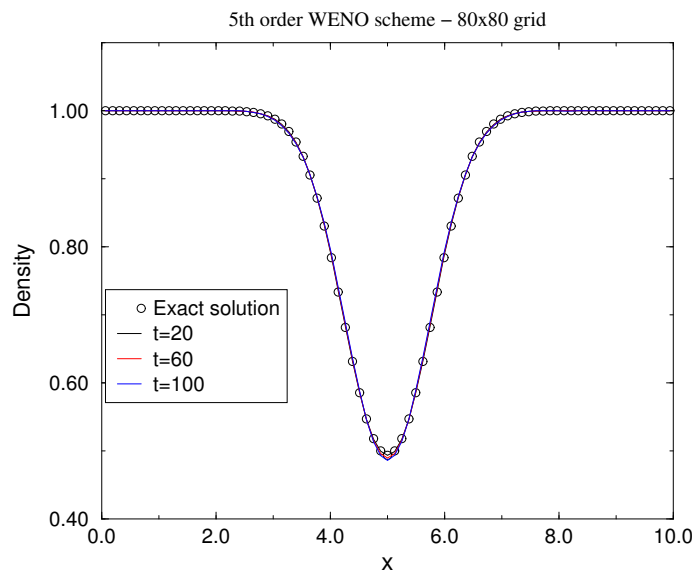
$$\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} = \mathbf{F}(x_{i+1/2}, y_j) + O(\Delta x^2)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} = \mathbf{F}(x_i, y_{j+1/2}) + O(\Delta y^2)$$

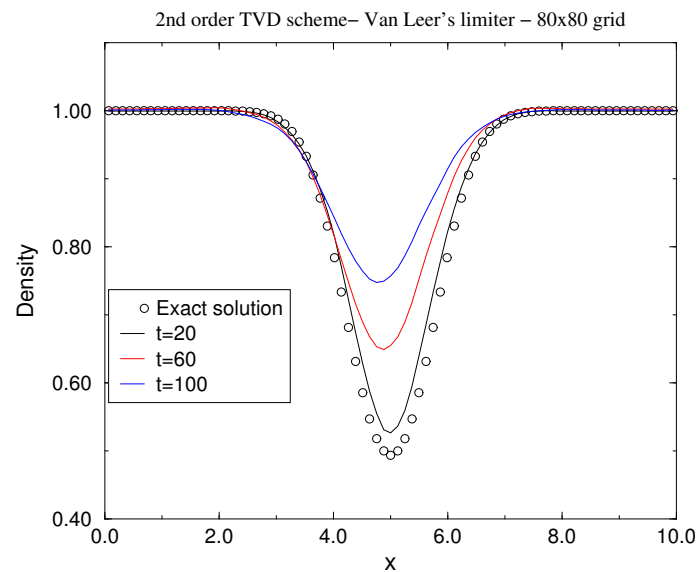
- Время счета для конечнообъемных схем в 3.7 раза больше, чем для конечноразностных (Casper et al., 1993)

## Пример: диагональная конвекция вихря

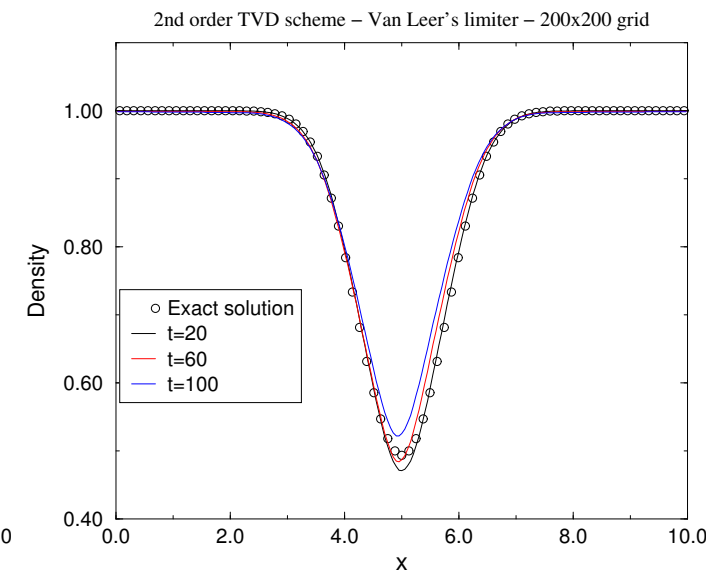
Изэнтропический вихрь переносится средним полем скорости  $u = 1, v = 1$



5th order WENO,  $80 \times 80$



2nd order TVD,  $80 \times 80$



2nd order TVD,  $200 \times 200$

## От простых геометрий к сложным

Вводится отображение:  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ .

$$\frac{\partial(JU)}{\partial t} + \frac{\partial\hat{F}}{\partial\xi} + \frac{\partial\hat{G}}{\partial\eta} = 0, \quad \hat{F} = y_\eta F - x_\eta G, \quad \hat{G} = -y_\xi F + x_\xi G, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

Метрические коэффициенты должны быть вычислены с высоким порядком точности.

В конечноразностных WENO схемах реконструкция применяется к функции  $y_\eta F - x_\eta G$ , которая может меняться даже при постоянных  $F$  и  $G$ . Как следствие, равномерный поток будет сохраняться не точно, а только до членов порядка  $O(\Delta x^r)$ .

Это может быть исправлено, если использовать уравнения Эйлера в форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{x_\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{x_\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{1}{y_\xi} \frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{1}{y_\eta} \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0,$$

которая все еще консервативна в смысле теоремы Лакса-Вендроффа, но требует вдвое больше вычислений потоков (*Shu, частное сообщение*).

## Аппроксимация вязких членов

Вязкие члены:  $\frac{\partial f^V}{\partial x}$ , где  $f^V = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$  (1) или  $f^V = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  (2)

Центральноразностная аппроксимация 4-го порядка:

$$\frac{\partial f^V}{\partial x} = \frac{\hat{f}_{i+1/2,j}^V - \hat{f}_{i-1/2,j}^V}{\Delta x}, \quad \hat{f}_{i+1/2,j}^V = \frac{-f_{i-1,j}^V + 7f_{i,j}^V - 7f_{i+1,j}^V - f_{i+2,j}^V}{12}$$

$$\frac{\partial f^V}{\partial x} = \frac{f_{i-2,j}^V - 8f_{i-1,j}^V + 8f_{i+1,j}^V - f_{i+2,j}^V}{12 \Delta x}$$

Повторное использование этой формулы для вычисления  $\partial u / \partial x$  в (1) приводит, однако, к аппроксимации на очень широком 9-точечном шаблоне, со слабой связью между четными и нечетными точками.

Близкая аналогия: использование  $(u_{i-2} - 2u_i + u_{i+2}) / (4\Delta x^2)$  вместо  $(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) / \Delta x^2$  для вычисления  $\partial^2 u / \partial x^2$  со 2-ым порядком.



## Аппроксимация вязких членов

Эту трудность можно преодолеть:

1. Используя неконсервативную форму вязких членов  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$  или
2. Используя нецентрированные формулы 4-го порядка при вычислении  $\partial u / \partial x$ :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-2,j} = \frac{-25u_{i-2,j} + 48u_{i-1,j} - 36u_{i,j} + 16u_{i+1,j} - 3u_{i+2,j}}{12\Delta x}$$

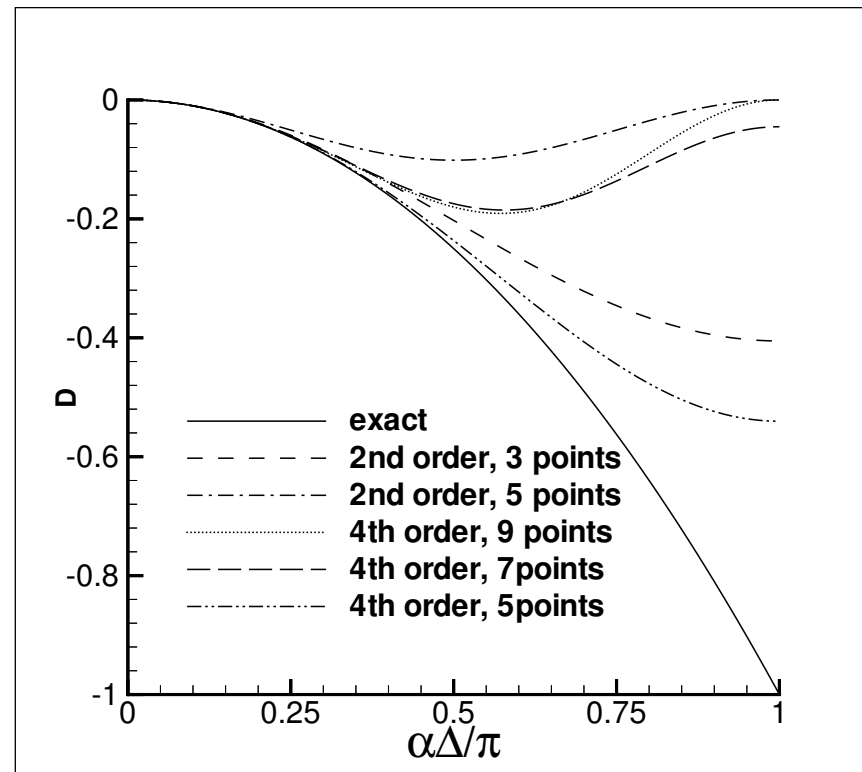
$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1,j} = \frac{-3u_{i-2,j} - 10u_{i-1,j} + 18u_{i,j} - 6u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{12\Delta x}$$

+ симметричные формулы для  $(\partial u / \partial x)_{i+1,j}$ ,  $(\partial u / \partial x)_{i+2,j}$

Чтобы вычислить  $\partial u / \partial y$  в (2), используется центральноразностная формула.

## Диссипативные свойства конечноразностных аппроксимаций второй производной

Точное дифференцирование:  $\frac{d^2}{dx^2} e^{i\alpha x} = -\alpha^2 e^{i\alpha x}$ ,  
аппроксимация =  $(\pi/\Delta)^2 D e^{i\alpha x}$



## Интегрирование по времени

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Пространственная дискретизация} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_t = \mathbf{L}(\mathbf{U})$$

Пусть схема устойчива и TVD при интегрировании методом Эйлера

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n), \quad \Delta t \leq \Delta t_1$$

Тогда можно попытаться найти методы Рунге–Кутты, также устойчивые и TVD при условии  $\Delta t \leq c \Delta t_1$

- Общий метод Рунге-Кутты

$$\mathbf{U}^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} \mathbf{U}^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(k)})), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{U}^{n+1}$$

будет TVD схемой, если  $\alpha_{ik} \geq 0$ ,  $\beta_{ik} \geq 0$ ,  $c = \min_{i,k} \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}}$ .

## TVD схемы Рунге-Кутты

Удается построить TVD схемы Рунге-Кутты вплоть до третьего порядка. При этом  $c = 1$ .

- Схема второго порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}) \end{aligned}$$

- Схема третьего порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(2)}) \end{aligned}$$